Oskar Grocholski

$X = Y$ — ciągi o wyrazach 0 i 1

φ, ψ — injekcje z X na Y oraz z Y na X

$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) = (0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots)$ — ψ działa identycznie

$F = \psi \circ \varphi$

$\psi(Y)$ — wszystkie ciągi, których pierwszym wyrazem jest 0

$F(X)$ — wszystkie ciągi, których pierwsze dwa wyrazy to 0,0

$Z = \psi(Y) \setminus F(X)$ — wszystkie ciągi, których pierwszym wyrazem jest 0 i pierwsze 2 wyrazy to nie 0,0

Z — wszystkie ciągi zaczynające się od 0,1

F — „dodaje" dwa zera na początku

$F^n(Z)$ — ciągi zaczynające się od $(2n+1)$ zer i jedynki $(n \in \mathbb{N}_+)$

$S = Z \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(Z)$ — S to wszystkie ciągi zaczynające się nieparzystą ilością zer i jedynką

Konstruujemy bijekcję $G: X \to \psi(Y)$

$$G((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)) = \begin{cases} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) & \text{gdy ciąg należy do } S \text{ (zaczyna się nieparzystą ilością zer i jedynką)} \\ (0, 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots) & \text{gdy ciąg nie należy do } S \text{ (zaczyna się nieparzystą [w tym zerową] liczbą zer i jedynką)} \end{cases}$$

1. Wartości leżą w $\psi(Y)$ — każdy ciąg będący wartością ma co najmniej jedno 0 na początku — zgodnie z definicją wszystko się zgadza

2. Różnowartościowość — $G((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)) = G((\varepsilon_1', \varepsilon_2' \dots))$

Zgodnie z definicją, jeżeli wartość funkcji G zaczyna się nieparzystą ilością zer, to argument należy do S, w przeciwnym razie nie należy. Wobec tego $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots)$ i $(\varepsilon_1', \varepsilon_2' \dots)$ mają taką samą ilość zer na początku, a zgodnie z definicją wszystkie kolejne ich wyrazy są równe □

3. Funkcja „na" — ciągi należące do $\psi(Y)$ to ciągi mające co najmniej jedno 0 na początku.

Jeżeli ciąg ma postać: $(\underbrace{0, 0 \dots 0}_{\substack{\text{parzysta liczba zer} \\ = 2n}}, 1, \underbrace{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1} \dots}_{\text{reszta}})$, to odpowiada mu $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2(n-1) \text{ zer}}, 1, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1} \dots)$

Jeżeli ciąg ma postać $(\underbrace{0, 0 \dots, 0}_{\text{nieparzysta liczba zer}}, 1, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1})$, to odpowiadającym mu argumentem jest ten sam ciąg. □