

Elementy logiki i teorii mnogości

Pojęcie zbioru należy do najbardziej podstawowych i najczęściej stosowanych pojęć matematycznych (zobanie przepisane od Kuratowskiego). Problem z tym pojęciem jest taki, że się go nie definiuje, czyli uważa za pojęcie pierwotne. Podobnie jak pojęcie elementu zbioru. Uważa się zatem że każdy wie co to znaczy „zbiór A ” oraz co znaczy „ x należy do zbioru A ” ($x \in A$). Okazuje się jednak, że zastawienie tego tak jak jest i opieranie się na samej intuicji prowadzi do sprzeczności. **Na przykład** rozważa się zbiory, których elementami są inne zbiory (prosta na płaszczyźnie jest zbiorem punktów o pewnych własnościach, można mówić o zbiorze wszystkich prostych). Weźmy ustalony zbiór A i rozważmy nowy zbiór składający się ze wszystkich podzbiorów zbioru A . Oznaczamy ten nowy zbiór 2^A . Daje się dosyć łatwo udowodnić, wkrótce to zrobimy, że zbiór 2^A jest istotnie większy od samego A i to niezależnie od natury wyjściowego zbioru A . Zwróćmy uwagę, że używam tu niezdefiniowanej koncepcji zbiorów większych i mniejszych. Te rzeczy dają się precyzyjnie zdefiniować.



Rozważmy więc teraz zbiór, którego elementami byłyby wszystkie możliwe zbiory. Zbiór wszystkich podzbiorów tego zbioru byłby więc od niego większy ale z ~~br~~ drugiej strony, skoro te podzbiory są zbiorami to zbiór podzbiorów zawierałby jest w zbiorze wszystkich zbiorów, a więc powinien być od niego mniejszy!

Otrzymujemy tu sprzeczność zwana paradoksem Cantora. Pokazuje ona, że kwestii teorii zbiorów, innej teorii mnogości nie można puścić całkowicie "na żywioł", jeśli nie chcemy popaść w kłopoty! Trzeba krótko mówiąc powiedzieć co wolno ^{czego} ~~o~~ nie wolno robić.

Nie będę tutaj podawać pełnego zestawu aksjomatów teorii mnogości, a tylko przykłady, które będą miały dla nas znaczenie. Aksjomaty te zapisane są w języku zdań logicznych, można także zapisać je w języku naturalnym.

Oto niektóre przykłady aksjomatów. Do ich zapisania używamy symboli oznaczających zbiory i ich elementy,

Aksjomat Ekstensjonalności

I Jeżeli zbiory A i B mają te same elementy, to są równe

$$\forall A \forall B \left(\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow (A = B) \right)$$

II Istnieje zbiór pusty

$$\exists x : \forall y \sim (y \in x) \quad x = \emptyset$$

istnieje dokładnie jeden zbiór pusty, co wynika z I

Aksjomat podzbiorów

Niech φ będzie formułą zdaniową nie zawierającą zmiennych w swojej definicji

$$\forall A \exists B : \forall x (x \in B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \varphi(x)$$

W zbiorze A istnieje podzbiór elementów mający tę własność, że formuła φ jest dla nich prawdziwa. W szczególności każdy zbiór zawiera $\emptyset$ jako podzbiór.

W standardowym zestawie aksjomatów opisuje się ogólniejszy aksjomat zastępowania. Z tego aksjomatu wynika rozwiązanie paradoксу Cantora - nie istnieje bowiem zbiór wszystkich zbiorów



Z aksjomatu podzbiorów wynika, że
można definiować podzbiory (czyli
zbiory) przy pomocy pewnych
warunków np

$$Y = \{ x \in S : \varphi(x) \}$$

warunki

Załóżmy przez chwilę że zbiór wszystkich
zbiorów istnieje i wstawmy go
w miejsce S . Formuła wtedy mówi
 $x \notin X$ (tzn x ^{nie} jest swoim elementem)

Wtedy mamy zbiór Y

$$Y = \{ x \in S : x \notin x \}$$

1. Z aksjomatu podzbiorów wynika, że
 Y jest zbiorem zatem można
sprawdzić, czy Y spełnia formułę
 φ . Powiedzmy, że nie wiemy czy spełnia,
bo od samego myślenia na ten temat już
się witasz na głowie. Załóżmy więc że
spełnia czyli $Y \in Y$, no ale skoro
spełnia to znaczy że $Y \notin Y$
Jeśli zaś nie spełnia, czyli $Y \notin Y$ to
by znaczyło, że jednak $Y \in Y$
Zdanie $Y \in Y$ i $Y \notin Y$ mają przeciwne
wartości logiczne więc nie mogą być

jednocześnie być spełnione implikacje
w obie strony! Założenie że S jest
zbiorem musi więc być fałszywe!

IV Aksjomat sumy: istnieje suma zbiorów
(dwóch) oraz suma rodziny zbiorów
indeksowanej dowolnym zbiorem

$$\forall R \exists X : \forall u u \in X \Leftrightarrow (\exists r \in R : u \in \tilde{R}^r)$$

albo

$$\forall R \exists X \forall u (u \in X) \Leftrightarrow (u \in r \wedge r \in R)$$

innymi słowy R jest zbiorem zbiorów
a X sumą tych wszystkich zbiorów ($= R$)
Typowo zapisujemy to inaczej: niech
 R będzie pewnym zbiorem a $\{Y_r\}_{r \in R}$
rodziną zbiorów indeksowaną elementami
z R . wtedy istnieje suma wszystkich
zbiorów z rodziny

$$X = \bigcup_{r \in R} Y_r$$

V Aksjomat zbioru podzbiorów

$$\forall A \exists P : \forall x x \in P \Leftrightarrow (\forall y y \in x \Rightarrow y \in A)$$

Zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje ale
istnieje zbiór podzbiorów ustalonego 

zbioru. Takie $\mathcal{P}$ oznaczamy 2^A .

Oznaczenie to ma swoje uzasadnienie w tym, że jeśli A ma skończoną liczbę elementów (n lub m) to liczba elementów zbioru 2^A jest równa 2^n .

To nie są wszystkie aksjomaty. Jest jeszcze np

(Pewnik)

... Aksjomat wyboru: Dla każdej rodziny R zbiorów parami rozłącznych $(Y_r)_{r \in R}$ $Y_r \cap Y_p = \emptyset$ jeśli $r \neq p$

istnieje zbiór S taki, który zawiera po jednym elemencie każdego zbioru.

Rozwaga się teoria mnogości bez pewnika wyboru, ale jest ona raczej kłopotliwa.

My będziemy pracować w ramach teorii z aksjomatem wyboru. Przyjmujemy więc

Aksjomatykę ZFC

Ernst Zermelo

1871-1953

choice

Abraham Fraenkel

1891-1965

Z przedstawionych powyżej aksjomatów można wyprowadzić podstawowe operacje na zbiorach takie jak suma, przecięcie, różnica, dopełnienie zbioru

Od tego momentu poruszamy zawartości aksjomatyki i przenosimy się na grunt nieco bezpieczniejszy, choć na razie cały czas bardzo teoretyczny.

Odwzorowanie: Niech X i Y będą ustalonymi zbiorami. Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór par $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Oznaczanie

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Relacja ze zbioru X do zbioru Y nazywamy podzbiór R ilocynu kartezjańskiego $X \times Y$. X nazywamy dziedziną relacji a Y przeciwdziedziną. Ten sposób definiowania w pewnym sensie utożsamia relację z jej wykresem. Myśleć należy jednak o relacji jako o pewnym sposobie łączenia elementów z X z elementami z Y w pary. Najczęściej używanym typem relacji jest odwzorowanie. Odwzorowaniem z X do Y nazywamy taką relację f że

$$\forall x \in X \quad \underbrace{\text{istnieje dokładnie jeden } y \in Y : (x, y) \in f}_{\exists!}$$



Notacja związana z odwzorowaniami jest zupełnie inna niż notacja związana z relacjami ogólniejszej natury.

Zamiast $f \subset X \times Y$ napisujemy

$$f: X \rightarrow Y$$

$\nwarrow$ dziedzina $\swarrow$ przeciwozobrazina

zamiast $(x, y) \in f$ napisujemy $f(x) = y$.

O odwzorowaniu możemy myśleć jak o pewnym przepisie jak z elementu zbioru X dostać element zbioru Y . Można więc dowolnie $x \in X$ ale, być może, nie każde Y się dostanie. Szczególne typy odwzorowań:

Surjekcja nazywanej odwzorowanie, które jest „na”, tzn. dowolny element $y \in Y$ jest jego wartością:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

Jeśli zdefiniujemy obraz odwzorowania f jako podzbiór tych $y \in Y$, które są wartościami odwzorowania, tzn.

$$f(Y) = \{ y \in Y : \exists x \in X \ f(x) = y \}$$

to f jest surjekcją jeśli $f(X) = Y$.

PRZYKŁAD:

Niech $X = \mathbb{R}$ $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (płaszczyzna)

$$f: X \rightarrow Y \quad f(r) = (\cos r, \sin r)$$

obrazem odwzorowania f jest zbiór

$\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ czyli okrąg o promieniu 1.

f nie jest surjekcją, $f(X) \subsetneq Y$

Niech $g: Y \rightarrow X$ $g(\xi, \eta) = \xi$

g jest rzutem na pierwszy składnik. g jest surjekcją.

Injekcja nazywamy odwzorowanie różnowartościowe, tzn. spełniające warunek

$$\varphi: X \rightarrow Y$$

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Zadane 2 odwzorowania z powyższego przykładu nie jest injekcją

PRZYKŁAD Niech $h: X \rightarrow Y$ będzie dane wzorem

$$h(r) = (2r, r^2)$$

łatwo sprawdzić, że h jest injekcją



załóżmy $h(r_1) = h(r_2)$. Oznacza to, że

$2r_1 = 2r_2$ i $r_1^2 = r_2^2$, ale z pierwszego równania już wynika, że $r_1 = r_2$.

h oczywiście nie jest surjekcją. Jego obrazem jest parabola o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2$ (we współrzędnych (x, y))

Odwzorowanie, które jest iniekcją i ^{surjekcją} ~~bijekcją~~ nazywamy bijekcją

Nazw powyższych pojęć będziemy używać powtarzanie i do występkiego. Na razie przykładu nam się nie do zdefiniowanie badanie jak duże są rozważane zbiory "na szuki" (*) tu wstawić:

DEFINICJA Mówimy, że zbiory X i Y są równoliczne jeśli istnieje bijekcja z X do Y .

(*) Definiujemy także (dla dowolnego odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ przeciwobraz podzbioru $A \subset Y$)

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

jeśli $A = \{y_0\}$ to piszemy $f^{-1}(y_0)$

Jeśli f jest bijekcją, to istnieje odwzorowanie odwrotne

$h: Y \rightarrow X$ takie, że

$$h(f(x)) = x \quad ; \quad f(h(y)) = y$$

Pisze się $h = f^{-1}$

Odwzorowanie można składać, tzn.

$$f: X \rightarrow Y \quad g: Y \rightarrow Z$$

istnieje $g \circ f: X \rightarrow Z$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \left(\text{uwaga na kolejność!} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f}$

Składanie odwzorowań ma własność zwaną łącznością, tzn.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$$

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad (*) \text{ KONIEC}$$

wracamy do mnożliwości. Zauważmy więc, że udało nam się zdefiniować mnożliwość ~~zanim~~ zanim zdefiniowaliśmy iloczyn elementów zbioru (tego w ogóle nam nie zrobimy...)

