SEMESTR II WYKŁAD 2 WEKTOROWE PRZESTRZENIE UNORMOWANE

Zaczynamy właściwy temat II-go semestru, czyli analizę funkcji wielu zmiennych. Jest to dobra okazja, żeby na różniczkowanie spojrzeć nieco szerzej, dlatego od czasu do czasu będziemy robić wycieczki w stronę przestrzeni nieskończonego wymiaru. Zacznijmy od motywacji – – dlaczego będziemy używać się tego, czego będziemy się uczyć

DLA JEDNEJ ZMIENNEJ $f\ I \to \mathbb{R}$ $x \in I$, $h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

I

$$f(x+h) = f(x) + ah + R(x,h)$$

f różniczkowalna w x jeśli istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $\lim\limits_{h \to 0} \frac{R(x,h)}{h} = 0$

$a = f'(x)$

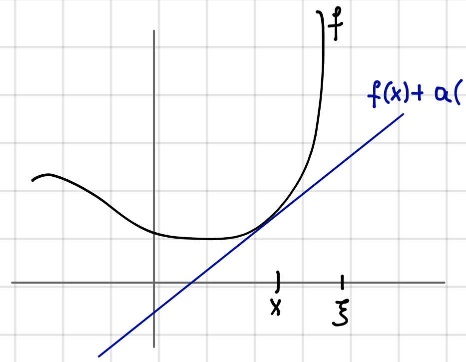
II

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ???$$

f jest różniczkowalna w x jeśli powyższa granica istnieje

funkcja f w otoczeniu x przybliżana jest funkcją afiniczną, której wykresem jest prosta

$$\xi \longmapsto f(x) + a(\xi - x)$$



$R(x,h)$ mierzy jakość przybliżenia

Dla funkcji jednej zmiennej oba sformułowania są równie dobre

DLA FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

$$f\ \mathbb{R}^2 \supset \mathcal{U} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

Wersja I daje się naturalnie uogólnić, zaś wersja II zupełnie nie. Pochodna mówi o zachowaniu funkcji w pobliżu punktu – pozwala przybliżyć skomplikowaną funkcję funkcją prostszą. Zamiast funkcji której wykresem jest prosta użyjemy funkcji, której wykresem jest płaszczyzna

przykład na następnej stronie

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + A\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R\big((x,y),(\delta x, \delta y)\big)$$

„przyrost" h jest teraz wektorem zaczepionym w punkcie (x,y) o współrzędnych $(\delta x, \delta y)$

A jest odwzorowaniem liniowym z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$$A = [A_x, A_y]$$

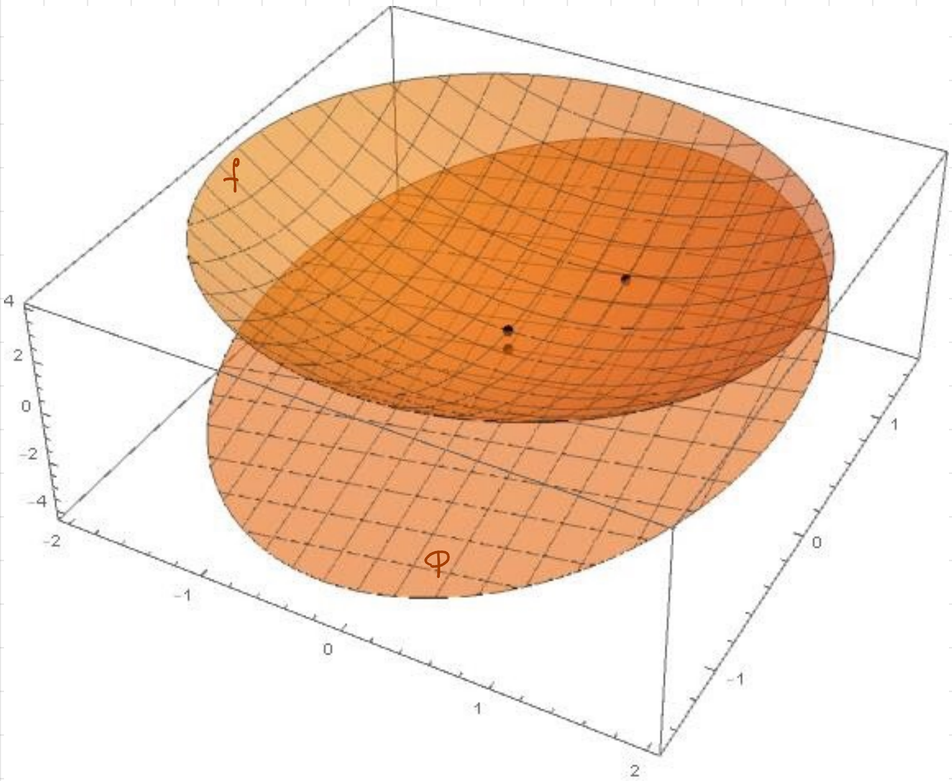
$(\delta x, \delta y) \longmapsto f(x,y) + A\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}$ jest odwzorowaniem, którego wykresem jest płaszczyzna styczna do wykresu f w punkcie (x,y)

Jak sformułować warunek odpowiednio szybkiego znikania R? Dokładnie tak jak poprzednio się nie da, bo nie możemy „dzielić" przez wektor. Wiadomo jednak, że znikanie wektora w $\mathbb{R}^2$ to znikanie jego długości. Można więc napisać

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|R((x,y),h)|}{\|h\|} = 0$$

PODSUMOWUJĄC Do zdefiniowania pojęcia pochodnej funkcji na $\mathbb{R}^2$ potrzebujemy (1) struktury wektorowej (żeby dodawać przyrosty) i (2) umiejętności liczenia długości przyrostów

PRZYKŁAD: FUNKCJA DWÓCH ZMIENNYCH, JEJ POCHODNA, PŁASZCZYZNA STYCZNA



$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

$$f'(x,y) = [2x,\ 4y] \qquad f'\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = [1,\ 2]$$

funkcja afiniczna przybliżająca f w otoczeniu $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$P(x,y) = f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + f'\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \frac{3}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right) + (2y - 1) = -\frac{3}{4} + x + 2y$$

$$\delta x = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\delta y = \left(y - \tfrac{1}{2}\right)$$

Na obrazku wykres funkcji f (wykresem jest paraboloida eliptyczna zanurzona w R^3) oraz wykres funkcji afinicznej P (wykresem jest płaszczyzna). Płaszczyzna będąca wykresem P jest styczna do wykresu f w punkcie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\right)$

Pochodna f w punkcie (x,y) jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni przyrostów, tzn na przestrzeni wektorów zaczepionych w w punkcie (x,y). W szczególności w punkcie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pochodną jest funkcjonał $[1\ \ 2]$ (zapisany jako wektor wierszowy)

Pochodna funkcji z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w punkcie (x,y) jest odwzorowaniem liniowym, w bazie reprezentowanym przez dwie liczby $[A_x, A_y]$. Zbierając wartości w różnych punktach otrzymujemy dwie funkcje $(x,y) \longmapsto A_x(x,y)$, $(x,y) \longmapsto A_y(x,y)$. Pochodna jest więc innym obiektem matematycznym niż wyjściowa funkcja. Inaczej niż to miało miejsce dla jednej zmiennej.

Żeby nie ograniczać się jedynie do $\mathbb{R}^n$ opiszemy teraz przestrzenie, które dobrze nadają się do „uprawiania" rachunku różniczkowego. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Normą na przestrzeni V nazywamy funkcję $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

(1) $\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \iff x = \bar{0}$ ← norma jest niezdegenerowana

(3) $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ ← norma jest dodatnio-jednorodna

(4) $\forall x, y \in V \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ← nierówność trójkąta

Norma zadaje w V metrykę $d(x,y) = \|x-y\|$ nazywaną metryką normową. Oznacza to, że $(V, \| \ \|)$ jest przestrzenią metryczną z całym „bogactwem" topologicznym. Przestrzeń wektorowa z normą nazywa się przestrzenią unormowaną. Jeśli dodatkowo przestrzeń ta jest zupełna nazywamy ją przestrzenią Banacha.

Stefan Banach 30 03 1892 Kraków – 31 08 1945 Lwów

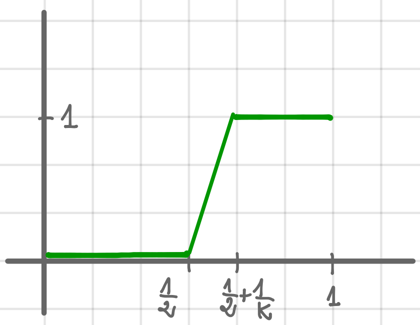
PRZYKŁADY PRZESTRZENI UNORMOWANYCH I BANACHA

(1) $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\|x\| = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2}$ jest przestrzenią Banacha

(2) X - zbiór, $B(X)$ - zbiór funkcji ograniczonych na X, $f \in B(X)$
$\|f\| = \sup_X |f(x)|$ $\quad (B(X), \| \ \|)$ jest przestrzenią Banacha

(3) (X,d) - przestrzeń metryczna. $\mathcal{F}$ - zbiór funkcji ograniczonych i ciągłych na X z normą supremum jest przestrzenią Banacha

(4) Weźmy $X = [a,b]$. Jak w (3) $\mathcal{C}([a,b])$ z normą supremum jest przestrzenią Banacha. W $\mathcal{C}([a,b])$ można wprowadzić inną normę $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$. Przestrzeń $\mathcal{C}([a,b])$ z normą $\| \ \|_1$ jest przestrzenią unormowaną, ale nie jest przestrzenią Banacha. Istotnie, rozważmy ciąg $f_k \in \mathcal{C}([0,1])$



$$\|f_k\|_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

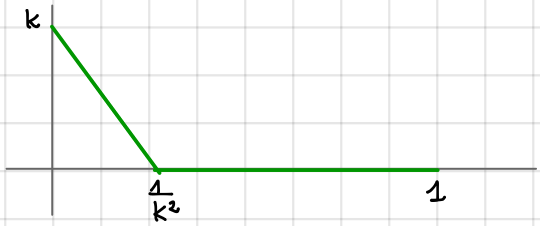
$$m > n \quad \|f_m - f_n\|_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2n}$$

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ wystarczy więc N takie że $\frac{1}{2N} < \varepsilon$, wtedy dla $m > n > N$ $\|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$. Ciąg f_k nie jest jednak zbieżny. W strukturze supremum ten ciąg nie jest ciągiem Cauchy'ego $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ dla $m \neq n$

Różnicę w topologii L^1 i topologii supremum można „pomacać" badając ciąg $(\varphi_k) \in \mathcal{C}([0,1])$

9

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0 & x \in [\frac{1}{k^2}, 1] \\ -k^3 x + k & x \in [0, \frac{1}{k^2}[\end{cases}$$



$$\|\varphi_k\|_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} k = \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$\varphi_k \xrightarrow{L_1} 0$ Punktowo (φ_k) nie jest zbieżny (∞ w $x=0$)) wobec tego oczywiście w topologii supremum też ten ciąg nie jest zbieżny

(5) W przykładzie (1) normę Euklidesową można zamienić na p-normę $\left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ lub $\|x\| = \sup|x_i|$ Jak wiadomo, topologie będzie ta sama. UWAGA W nieskończenie wymiarowej przestrzeni jak $\mathcal{C}([0,1])$ widzieliśmy w punkcie (4) że topologie mogą być różne

Różniczkowanie definiować będziemy w przestrzeniach Banacha. Przyjrzyjmy się nieco przestrzeniom z normą, przestrzeniom Banacha i odwzorowaniom liniowym w takich przestrzeniach

STWIERDZENIE W wektorowej przestrzeni unormowanej topologia jest zgodna ze strukturą wektorową tzn dodawanie wektorów i mnożenie przez liczbę są ciągłe

DOWÓD

$V \times V \ni (x,y) \longmapsto x+y \in V$ $\quad x_n \to x, \; y_n \to y$ $\quad \|(x_n+y_n)-(x+y)\| = \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \leqslant$

$\|x_n - x\| \to 0$

$\|y_n - y\| \to 0$

$$\leqslant \underbrace{\|x_n-x\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|y_n-y\|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$\mathbb{R} \times V \ni (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in V$ $\quad x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$ $\quad \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| = \|(\lambda_n - \lambda)x + \lambda_n(x_n - x)\| \leqslant$

$$\leqslant \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{<\varepsilon}\|x\| + \underbrace{|\lambda_n|}_{<|\lambda|+\varepsilon}\underbrace{\|x_n - x\|}_{<\varepsilon} \leqslant \|x\|\varepsilon + (|\lambda|+\varepsilon)\varepsilon$$

dowolnie małe ■

STWIERDZENIE Norma jest funkcją ciągłą

DOWÓD Ciągowa definicja ciągłości normy mówi, że jeśli $x_n \to x$ to $\|x_n\| \to \|x\|$

To oznacza, że $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N$ $\quad \forall \varepsilon > 0$ $\quad \big|\|x_n\| - \|x\|\big| < \varepsilon$

$\|x_n - x\| < \varepsilon$

Pomocnicze rachunki
$$\begin{cases} \|x\| = \|x - x_n + x_n\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n\| & \|x\| - \|x_n\| \leqslant \|x - x_n\| \\ \|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\| & \|x_n\| - \|x\| \leqslant \|x_n - x\| \end{cases}$$

$$\big|\|x\| - \|x_n\|\big| < \|x_n - x\|$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$ i bierzemy N takie że dla $n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$ wtedy także

$\big|\|x\| - \|x_n\|\big| < \|x - x_n\| < \varepsilon$, tzn $\|x_n\| \to \|x\|$ ■

DEFINICJA Mówimy że dwie normy są równoważne jeśli zadają równoważne metryki. Wiadomo że równoważne metryki zadają identyczne topologie. Wiadomo także, że ogólnie twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn bywa, że dwie nierównoważne metryki definiują tę samą topologię. Okazuje się że dla metryk pochodzących od normy tw odwrotne jednak zachodzi

STWIERDZENIE Jeśli topologie przestrzeni $(V, \| \|_1)$ i $(V, \| \|_2)$ są równe to normy są równoważne

DOWÓD Zauważmy że w przestrzeni unormowanej informacje o topologii jest „zakodowana" w kulach o środku w 0 i promieniu r (Albo nawet $r=1$ ze względu na jednorodność)
Istotnie $K(x,r) = x + K(0,r)$ Dla wykazania równoważności norm należy wykazać, że istnieją $\alpha, \beta > 0$ takie, że

$$\forall x \quad \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \quad , \quad \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

Skoro topologie są równe to $K_1(0,1)$ jest otwarta względem obu metryk, tzn każdy punkt kuli $K_1(0,1)$ należy do $K_1(0,1)$ wraz z pewną kulą względem normy 1 i 2 W szczególności $\exists a>0 \quad K_2(0,a) \subset K_1(0,1)$ Wiadomo zatem, że $\overline{K_2(0,\alpha)} \subset \overline{K_1(0,1)}$ Kula domknięta w topologii normowej jest domknięciem kuli otwartej $(\overline{K}(x,r) = \overline{K(x,r)})$ zatem $\overline{K}_2(0,a) \subset \overline{K}_1(0,1)$

jeśli $\|x\|_1 = 1$ to $\|x\|_2 \geq a$

To nie jest ogólna prawda Np w metryce dyskretnej tak nie jest
$K(x,1) = \{x\}$ $\quad \overline{K(x,1)} = \{x\}$
$\overline{K}(x,1) = X$

Weźmy dowolne x

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x_1\|} \right\|_2 \geq a \Rightarrow \|x\|_2 \geq a \|x_1\|$$

$$\Rightarrow \|x_1\| \leq \frac{1}{a} \|x\|_2 \qquad \alpha = \frac{1}{a}$$

β dostaniemy zamieniając rolami 1 i 2 ■

Żeby udowodnić równość dwóch zbiorów wykażemy zawieranie w obie strony, tzn
$\overline{K(x,r)} \subset \overline{K}(x,r)$ oraz $\overline{K}(x,r) \subset \overline{K(x,r)}$

takie i zawsze prawdziwe

nie zawsze prawdziwe, w topologii normowej owszem

$K(x,r) = \{y \;\; \|x-y\| < r\}$
$\overline{K}(x,r) = \{y \;\; \|x-y\| \leq r\}$

zbiór domknięty, bo przeciwobraz $[0,r]$ w odwzorowaniu ciągłym

$K(x,r) \subset \overline{K}(x,r)$
$\Downarrow$
$\overline{K(x,r)} \subset \overline{\overline{K}(x,r)} = \overline{K}(x,r)$

Niech $y \;\; \|x-y\| = r$ i.e. $y \in \overline{K}(x,r) \setminus K(x,r)$

$y_n = x + \left(\frac{n-1}{n}\right)(y-x) \qquad y_n \longrightarrow y \qquad y_n \in K(x,y)$

bo $\|y_n - x\| = \|x + \left(\frac{n-1}{n}\right)(y-x) - x\| = \frac{n-1}{n}\|y-x\| =$
$= \frac{n-1}{n} r = (1 - \frac{1}{n}) r < r$

mamy więc $y \in \overline{K(x,r)}$ z dowolności y wynika $\overline{K}(x,y) \subset \overline{K(x,y)}$ ■

Wśród wektorowych przestrzeni unormowanych przestrzenie skończenie wymiarowe są szczególnie przyjazne Wskazuje na to następujące stwierdzenie

STWIERDZENIE Niech $(X, \| \|)$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną Prawdziwe są zdania

(1) Jeśli $\| \|'$ jest inną normą na X, to $\| \|$ i $\| \|'$ są równoważne
(2) Każdy domknięty i ograniczony podzbiór jest zwarty
(3) X jest p Banacha

Stwierdzenie to udowodnimy za chwilę Kluczowe będzie tu użycie pewnego odwzorowania liniowego (liniowy izomorfizm związany z wyborem bazy) Dla wygody udowodnimy

Więc najpierw inne twierdzenie dotyczące odwzorowań liniowych w przestrzeniach unormowanych

TWIERDZENIE Niech $(X, \| \|_X)$, $(Y, \| \|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi, $T \in L(X,Y)$. Równoważne są warunki

(1) T jest ciągłe (2) T jest ciągłe w $\bar{0}$ (3) $\sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$

DOWÓD (1) $\Rightarrow$ (2) oczywiste (2) $\Rightarrow$ (3) e a Załóżmy, że $\sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \infty$ oznacza to, że istnieje ciąg elementów $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ z kuli domkniętej o promieniu 1 w X taki, że $\|Tx_k\|_Y \longrightarrow \infty$. Z tego ciągu można wybrać podciąg mający własność $\|Tx_{k_m}\|_Y \geq m$. Dla uproszczenia notacji użyjemy dalej (x_n) $\|Tx_n\|_Y \geq n$

Definiujemy nowy ciąg $\xi_m = \frac{1}{m} x_m$ $\|x_n\| \leq 1$ zatem $\xi_m \longrightarrow 0_X$ T jest ciągłe w zerze, więc powinno być $T\xi_m \longrightarrow 0_Y$, ale

$\|T\xi_n\|_Y = \|T\frac{1}{n}x_n\|_Y = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \geq 1$ sprzeczność!

(3) $\Rightarrow$ (1) Ciągłość T wykażemy używając df Heinego. Niech $x_m \longrightarrow x$. Wtedy $x_m - x \longrightarrow 0_X$, $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$. Szacujemy

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| = \left\|T\left(\frac{\|x_n-x\|}{\|x_n-x\|}(x_n-x)\right)\right\| = \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \underbrace{\left\|T\frac{(x_n-x)}{\|x_n-x\|}\right\|}_{\text{ograniczone}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Wynika stąd, że $Tx_n \longrightarrow Tx$

■

DEFINICJA Odwzorowania spełniające warunki z twierdzenia nazywamy odwzorowaniami ograniczonymi. Zbiór odwzorowań ograniczonych z X do Y oznaczymy $B(X,Y)$. Będziemy też używać $B(X)$ zamiast $B(X,X)$

W przestrzeni $B(X,Y)$ można wprowadzić normę wzorem $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$. Sprawdzamy, że warunki są spełnione

$\|T\| \geq 0$ - oczywiste, $\|T\| = 0$ oznacza $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = 0$ tzn $\forall x$ $\|x\| \leq 1$ $Tx = 0$ tzn $T = 0$

$$\|T+S\| = \sup \|(T+S)x\| = \sup \|Tx + Sx\| \leq \sup \left(\|Tx\| + \|Sx\|\right) \leq \sup\|Tx\| + \sup\|Sx\| = \|T\| + \|S\|$$

$$\|\lambda T\| = \sup \|\lambda T x\| = |\lambda| \sup \|Tx\| = |\lambda| \|T\|$$

$B(X,Y)$ jest przestrzenią unormowaną

Wróćmy teraz do DOWODU STWIERDZENIA. W X takiej, że $\dim X = n$ wybieramy bazę $(e_1, \ldots, e_n)$. Baza definiuje odwzorowanie

$$\mathbb{R}^n \ni (x^1, x^2, \ldots, x^n) \longmapsto x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n \in X$$

Jest to izomorfizm liniowy. Pokażemy, że T, T^{-1} są ciągłe jeśli w $\mathbb{R}^n$ weźmiemy normę $\| \|_\infty$. Weźmy ciąg $\lambda(k) \in \mathbb{R}^n$ $\lambda(k) = (\lambda^1(k), \ldots, \lambda^n(k)) \longrightarrow 0$ tzn $\max\limits_i |\lambda^i(k)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$$\|T(\lambda(k))\| = \|\lambda^1(k)e_1 + \ldots + \lambda^n(k)e_n\| \leq |\lambda^1(k)|\|e_1\| + \ldots + |\lambda^n(k)|\|e_n\| \leq \max_j |\lambda^j(k)| \sum_i \|e_i\| = \|\lambda(k)\|_\infty \sum_i \|e_i\|$$

Baza (e) jest ustalona, więc $\sum_i \|e_i\|$ jest stałą liczbą. Jeśli $\|\lambda(k)\|_\infty \longrightarrow 0$ to także $\|T\lambda(k)\| \longrightarrow 0$. T jest ciągły w 0 a więc ciągły.

Weźmy teraz T^{-1}. Jeśli T^{-1} nie jest ciągłe, to nie jest ciągłe w 0. Istnieje wobec tego ciąg taki, że $x_k \longrightarrow 0$ ale $T^{-1}x_k \not\longrightarrow 0$ w szczególności ma podciąg spełniający
$\|T^{-1}x_{k_m}\|_\infty > \delta$ dla pewnego $\delta > 0$. Upraszczając $x_m \longrightarrow 0$ i $\|T^{-1}x_m\|_\infty > \delta$

$v_m = \dfrac{T^{-1}x_m}{\|T^{-1}x_m\|_\infty}$ v_m należy do sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Sfera w $\mathbb{R}^n$ jest zwarta. v_m zawiera podciąg zbieżny do elementu v o normie 1

$$v_{m_\ell} \longrightarrow \underset{\substack{\neq \\ 0}}{v} \qquad Tv_{m_\ell} = \frac{x_{m_\ell}}{\|T^{-1}x_{m_\ell}\|} \longrightarrow 0$$

bo $\|T^{-1}x_{m_\ell}\| > \delta$ więc $\dfrac{1}{\|T^{-1}x_{m_\ell}\|} < \dfrac{1}{\delta}$

sprzeczność z ciągłością T

Udowodniliśmy więc, że T, T^{-1} są ciągłe. T jest więc homeomorfizmem. Oznacza to, że obrazy i przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte. Dowód jest prawdziwy dla dowolnej normy w X, tzn $(X, \|\ \|)$ jest homeomorficzne $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ oraz $(X, \|\ \|')$ jest homeomorficzne $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$. Złożenie homeomorfizmów jest homeomorfizmem, zatem $(X, \|\ \|)$ jest homeomorficzne $(X, \|\ \|')$. Topologie zadawane przez obie normy są jednakowe a zatem normy są równoważne.

(2) Weźmy zbiór D domknięty i ograniczony w X. $T^{-1}(D)$ jest domknięty w $\mathbb{R}^n$

$$\exists M>0 \quad \forall x \in D \quad \|x\| \leq M$$

dla $x \in D$ mamy $\|T^{-1}x\| \leq \|T^{-1}\|\|x\| \leq \|T^{-1}\| M$ zatem $T^{-1}(D)$ jest ograniczony w $\mathbb{R}^n$. Domknięte i ograniczone zbiory w $\mathbb{R}^n$ są zwarte. $T^{-1}(D)$ jest więc zwarty. $D = T(T^{-1}(D))$ jest obrazem zbioru zwartego w odwzorowaniu ciągłym więc jest zwarty.

(3) Weźmy ciąg Cauchy'ego (x_n) w X. $T^{-1}x_n$ jest Cauchy'ego w $\mathbb{R}^n$ bo
$\|T^{-1}x_n - T^{-1}x_m\| = \|T^{-1}(x_n - x_m)\| \leq \|T^{-1}\| \|x_n - x_m\|$
zatem $T^{-1}(x_n)$ zbieżny do $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Z ciągłości T wynika, że x_n zbieżny do $T\lambda$ ∎

Wróćmy jeszcze na moment do odwzorowań liniowych. Nie wszystkie odwzorowania liniowe na przestrzeni unormowanej są ciągłe (w nieskończenie wymiarowym przypadku). Np dla $X = \mathcal{C}([0,1])$ $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$ funkcjonał liniowy przyporządkowujący funkcji f jej wartość w $x=0$ nie jest ciągły. Istotnie, ciąg φ_k z przykładu (4) przestrzeni unormowanych jest zbieżny do 0 zaś funkcjonał $\delta_0(f) = f(0)$ daje $\delta_0(\varphi_k) = \varphi_k(0) = k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. Ewaluacja w punkcie nie jest więc ciągła. Na przestrzeni skończenie wymiarowej wszystkie funkcjonały liniowe są ciągłe.

UWAGA Pracując z wektorowymi przestrzeniami unormowanymi zazwyczaj używamy innej niż na zajęciach z algebry definicji przestrzeni dualnej. Przestrzeń dualna do przestrzeni unormowanej składa się z funkcjonałów liniowych ciągłych

Ogólniej, zachodzi następujące stwierdzenie

STWIERDZENIE Jeśli X, Y są unormowanymi przestrzeniami skończonego wymiaru to $B(X,Y) = L(X,Y)$ tzn wszystkie odwzorowania liniowe są ciągłe

DOWÓD Dowód wystarczy przeprowadzić dla odwzorowań liniowych z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Wiadomo, że odwzorowanie takie to macierze mające n kolumn, m wierszy. W obu przestrzeniach użyjemy normy $\| \ \|_\infty$. Dowodzić można badając ciągłość w 0 lub szukając normy odwzorowania. Użyjemy tej drugiej metody. Niech więc (a^l_j) $l \in \{1, \dots, m\}$ $j \in \{1, \dots, n\}$ będzie macierzą odwzorowania $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$(ax)^l = \sum_k a^l_k x^k \qquad \|ax\|_\infty = \max_l \left|\sum_k a^l_k x^k\right| \leqslant \max_l \sum_k |a^l_k||x^k| \leqslant \max_l \underbrace{\max_l |x^l|}_{\|x\|_\infty} \sum_k |a^l_k| =$$

$$\leqslant \max_l \sum_k |a^l_k| \quad \|x\|_\infty$$

Z powyższego rachunku wynika, że

$$\sup_{\|x\|_\infty \leqslant 1} \|ax\|_\infty \leqslant \max_l \sum_k |a^l_k|$$

To już wystarczy do wykazania ciągłości

Jeśli uda nam się znaleźć x, które realizuje tę wartość, wykażemy, że

$$\|a\| = \max_l \sum_k |a^l_k|$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & \xrightarrow{k} & & & \\
\Big\downarrow l & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_n & \sum_k |a^1_k| \\
 & a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_n & \sum_k |a^2_k| \\
 & a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_n & \\
 & a^m_1 & a^m_2 & a^m_3 & a^m_n & \sum_k |a^m_k|
\end{array}$$

największa z tych liczb

Takie x istnieje. Niech l_0 będzie tą wartością wskaźnika dla którego realizuje się maksimum, tzn $\max_l \sum_k |a^l_k| = \sum_k |a^{l_0}_k|$ weźmy x $x^k = \operatorname{sgn} a^{l_0}_k$, wtedy $a^{l_0}_k x^k = |a^{l_0}_k|$. Uzyskamy wtedy

$$\|ax\|_\infty = \max_l \sum_k a^l_k x^k = \sum_k a^{l_0}_k x^k = \sum_k |a^{l_0}_k| \quad \blacksquare$$

Skoro wszystkie odwzorowania liniowe na przestrzeni skończonego wymiaru są ciągłe, to także wszystkie funkcjonały liniowe są ciągłe. Przestrzeń dualna w sensie przestrzeni unormowanych jest więc taka sama jak przestrzeń dualna w sensie algebraicznym