SZEREGI FUNKCYJNE

26,27

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

Naturalnym uogólnieniem pojęcia szeregu potęgowego jest szereg funkcyjny. Zmiana polega na tym, że wyraz szeregu nie jest liczbą a funkcją zależną od zmiennej:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

Po wstawieniu konkretnej wartości x otrzymujemy „zwykły” szereg liczbowy, zbieżny lub nie. Jeśli dla pewnych x, np. z odcinka I szereg jest zbieżny jego suma w każdym punkcie $x \in I$ określa funkcję $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_n u_n(x)$. Mówimy wtedy, że szereg $\sum u_n(x)$ jest punktowo zbieżny do funkcji f. Badanie zbieżności punktowej szeregu funkcyjnego nie różni się istotnie od badania szeregów liczbowych. Problem pojawia się kiedy chcemy wnioskować o własnościach funkcji granicznej na podstawie własności wyrazów szeregu. Myślimy tutaj o własnościach typu ciągłość, różniczkowalność, całkowalność.

PRZYKŁAD: Rozważmy szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

Sumy częściowe:

$$U_0(x) = x^2 \quad U_1(x) = x^2\left[\frac{x^2+2}{1+x^2}\right] \quad U_2(x) = x^2\left[\frac{x^4+3x^2+3}{(1+x^2)^2}\right] \quad \cdots$$

Ten przykład jest o tyle prosty, że możemy łatwo policzyć ogólną postać sumy częściowej

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = x^2\,\frac{1-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+x^2}} =$$

$$= x^2\,\frac{(1+x^2)}{x^2}\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) = (1+x^2)\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right)$$

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1+x^2)\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) = (1+x^2) \quad \text{dla } x\neq 0$$

2

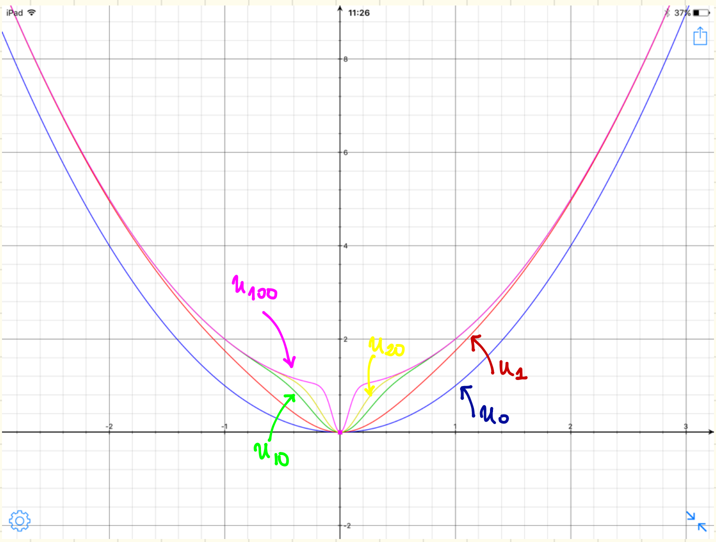
jednak dla $x=0$

$$u_n(0)=1\cdot\left(1-\frac{1}{1}\right)=0 \quad \text{zatem } u(0)=0$$

$$u(0)=\begin{cases}1+x^2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

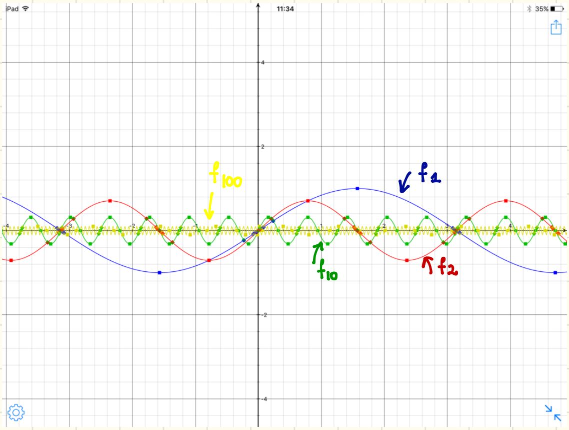
Funkcja graniczna jest nieciągła w zerze. Oznacza to że nie można zamienić kolejności przechodzenia do granicy

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} u_n(x)$$



Wniosek: ciąg funkcji ciągłych, szereg funkcji ciągłych nie musi być zbieżny do funkcji ciągłej.

PRZYKŁAD: $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) = 0$$

Funkcja graniczna jest stała a więc różniczkowalna

Ciąg pochodnych $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ nie jest zbieżny, w niektórych punktach ma granicę ∞, w niektórych nie ma granicy.

Mamy więc ciąg różniczkowalnych funkcji zbieżny do óżniczkowalnej granicy ale ciąg pochodnych nie ma granicy. W szczególności nie można napisać

$$\cancel{\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x)}$$

Potrzebujemy zatem jakiegoś sposobu rozpoznawanie kiedy na podstawie własności wyrazów ciągu czy szeregu funkcyjnego możemy wnioskować o tych samych własnościach dla funkcji granicznych

Problemy z zachowaniem własności funkcji przy przejściu do granicy wiążą się z tym, że w otoczeniu pewnych punktów wyrazy ciągu zmieniają się coraz szybciej wraz ze zmianą n. W pierwszym przykładzie dotyczy to punktu x_0, w drugim każdego z punktów. Takie sytuacje rozpoznajemy korzystając z pojęcia zbieżności jednostajnej tzn zbieżności ciągu funkcyjnego w metryce supremum.

DEFINICJA: Niech X będzie zbiorem a (Y, d) przestrzenią metryczną. Niech także $f_n : X \longrightarrow Y$ $n\in\mathbb{N}$ będzie ciągiem odwzorowań. Mówimy że

(1) f_n dąży do f **punktowo** jeśli $\forall x\in X$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f$

(2) f_n dąży do f **jednostajnie** jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_X d(f_n(x), f(x)) = 0$

tzn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N \quad \sup\limits_X d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

(3) Jeśli dodatkowo X jest przestrzenią metryczną to mówimy, że f_n dąży do f **niemal jednostajnie** jeżeli f_n dąży do f jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze X.

Zauważmy że w przykładzie 1 ciąg sum częściowych

$$u_n(x) = (1+x^2)\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) \text{ dąży punktowo do } u_\infty(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nie jest to jednak zbieżność jednostajna gdyż dla każdego n znajdziemy otoczenie $x=0$ takie, że wartości funkcji granicznej są bliskie 1 zaś wartości funkcji u_n bliskie zeru. Wystarczy rozważyć

$$u_n\left(\tfrac{1}{n}\right) \ ; \ u_\infty\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\| $$

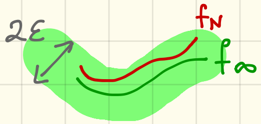
$$\frac{n^2+1}{n}\left(1 - \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

zatem $\sup |u_n(x) - u_\infty(x)| \geq 1$.

TWIERDZENIE: Niech (X,d), (Y,ρ) będą przestrzeniami metrycznymi. Granica jednostajna ciągu odwzorowań ciągłych $f_n: X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym

DOWÓD:

$$f_n \longrightarrow f$$



$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leq d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x)) \leq$$

$$d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x))$$

Weźmy teraz $m \in \mathbb{N}$ takie żeby $\sup d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, wtedy pierwszy i trzeci składnik sumy jest ograniczony przez ε. 5

Drugi ograniczamy korzystając z ciągłości f_n: bierzemy δ: dla $d_X(x, x_0) < \delta$ mamy $d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon$.

$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leq d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x)) \leq$$

$$\underbrace{d_Y(f(x_0), f_n(x_0))}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d_Y(f_n(x_0), f_n(x))}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d_Y(f_n(x), f(x))}_{\leq \varepsilon}$$

Zatem dla δ: $d_X(x_0, x) < \delta$ $d_Y(f(x_0), f(x)) < 3\varepsilon$ co dowodzi ciągłości f. ■

Uwaga: Ciągłość jest pojęciem lokalnym, co oznacza, że w założeniach twierdzenie można złagodzić warunek jednostajnej zbieżności do niemal jednostajnej dla przestrzeni lokalnie zwartej czyli takiej, której każdy punkt posiada zwarte otoczenie.

W dalszym ciągu interesować nas będą takie własności jak różniczkowalność i całkowalność, wobec tego ograniczymy się do funkcji określonych na $\mathbb{R}$ lub jego podzbiorach i o wartościach w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Jeśli funkcje mają wartości w $\mathbb{C}$ traktujemy je jak parę funkcji rzeczywistych.

TWIERDZENIE: $f_n :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1, zbieżny punktowo do f. Jeśli ciąg pochodnych $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do g niemal jednostajnie na $]a,b[$ to f jest różniczkowalne i $f' = g$.

DOWÓD: Naszym zadaniem jest wykazać istnienie granicy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ oraz to, że granica ta jest równa $g(x)$

6

tzn $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \ |h|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| < \varepsilon$

Wiadomo, że f_n są klasy C_1, tzn w szczególności

$$f_n(x+h) = f_n(x) + h\cdot f_n'(x+\vartheta h) \quad \vartheta \in]0,1[$$

$$\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} = f_n'(x+\vartheta h)$$

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - g(x)\right| = \left|f_n'(x+\vartheta h) - g(x)\right| \leq \underline{\left|f_n'(x+\vartheta h) - g(x+\vartheta h)\right|} +$$

$$\underline{|g(x+\vartheta h) - g(x)|}$$

g jest granicą jednostajną ciągu funkcji ciągłych więc jest ciągła. W tej sytuacji dla ustalonego ε istnieje δ taka, że jeśli $|\vartheta h| < \delta$ to $|g(x+\vartheta h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ $\vartheta \in]0,1[$ wystarczy więc $h<\delta$.

g jest granicą niemal jednostajną ciągu f_n'. Jeśli więc weźmiemy $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ taki, że $x \in [\alpha,\beta]$ to istnieje N takie, że dla $n>N$

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ostatecznie więc dla $|h|<\delta$ i $n>N$ mamy

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - g(x)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-g(x)\right|<\varepsilon$$

$$\Big\downarrow n\to\infty$$

Nierówność ta wymaga, aby n było wystarczająco duże. Prawa strona od n nie zależy, można więc wziąć $\lim_{n\to\infty}$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|\leqslant\varepsilon$$ Ta nierówność zachodzi dla $|h|<\delta$. ■

TWIERDZENIE Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych na $[a,b]$ zbieżnym jednostajnie do funkcji f. Wtedy f całkowalna i

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Jeśli f całkowalna to twierdzenie jest raczej oczywiste:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right|\leqslant\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx$$

$$\leqslant(b-a)\cdot\varepsilon$$ dla wystarczająco dużych n.

Jak wykazać całkowalność f? Musimy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje podział π odcinka $[a,b]$ taki, że $\overline{S}(\pi,f)-\underline{S}(\pi,f)<\varepsilon$. Wiadomo, że dla f_n taki podział istnieje: $\overline{S}(\pi,f_n)-\underline{S}(\pi,f_n)<\eta$ $\quad \pi=\{a,t_1,t_2,\dots,t_{k-1},b\}$

dla małego η

Zauważmy, że dla wystarczająco dużych n mamy

$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\eta$ co oznacza że

$$f_n(x)-\eta < f(x) < f_n(x)+\eta$$

i dalej

$$\sup f_n-\eta\leqslant\sup f\leqslant\sup f_n+\eta$$
$$\inf f_n-\eta\leqslant\inf f\leqslant\inf f_n+\eta$$

Ma to swoje konsekwencje dla sumy dolnej i górnej

$$\overline{S}(\pi,f)=\sum\sup_{[\dots]}f\,(t_i-t_{i-1})\leqslant\sum(\sup f_n+\eta)(t_i-t_{i-1})=\overline{S}(\pi,f_n)+\eta(b-a)$$
$$\underline{S}(\pi,f)=\sum\inf_{[\dots]}f\,(t_i-t_{i-1})\geqslant\sum(\inf f_n-\eta)(t_i-t_{i-1})=\underline{S}(\pi,f_n)-\eta(b-a)$$

$$\underline{S}(f_n,\pi)-\eta(b-a)\leqslant\underbrace{\underline{S}(f,\pi)\leqslant\overline{S}(f,\pi)}\leqslant\overline{S}(\pi,f_n)+\eta(b-a)$$

$$\overline{S}(\pi,f_n)-\underline{S}(\pi,f_n)\leqslant\eta+2\eta(b-a)=\eta(1+2(b-a))$$

Należy więc wziąć π i n odpowiednie dla $\eta=\frac{\varepsilon}{1+2(b-a)}$ ∎

Widać więc, że istotną rolę w badaniu własności funkcji granicznych ma sprawdzanie, że zbieżność jest jednostajna lub niemal jednostajna. Dla ciągów funkcyjnych zazwyczaj robimy to z definicji. Do dyspozycji mamy w zasadzie tylko jedno pomocnicze twierdzenie:

TWIERDZENIE DINIEGO: Jeśli (X,d) jest lokalnie zwarta i ciąg funkcji ciągłych jest zbieżny do funkcji ciągłej punktowo a ponadto $f_n(x)$ jest monotoniczny dla każdego x to ciąg ten jest zbieżny niemal jednostajnie

DOWÓD OPUSZCZAMY

Dla szeregów funkcyjnych korzystanie bezpośrednio z definicji jest trudniejsze.

Do pomocy mamy tu podstawowe i najważniejsze

KRYTERIUM WEIERSTRASSA

Niech $\sum u_n$ będzie szeregiem funkcyjnym na zbiorze X. Jeśli istnieje szereg liczbowy $\sum a_n$ taki, że $\sup\limits_X |f_n(x)| \leqslant a_n$ i $\sum a_n$ zbieżny to $\sum f_n$ jest

zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na X.

DOWÓD: Dla ustalonego $x \in X$ $\sum u_n(x)$ jest zbieżny bezwzględnie na podstawie I kryterium porównawczego. Funkcja będąca sumą tego szeregu istnieje więc: $u(x) = \sum u_n(x)$ $u: X \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$

$$\left| u(x) - \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

„ogon" szeregu zbieżnego

$$\sup_X \left| u(x) - \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

co wystarczy do zbieżności jednostajnej ■