SEMESTR II WYKŁAD 3 RÓŻNICZKOWANIE W PRZESTRZENIACH BANACHA

Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, zbiór $\mathcal{U} \subset X$ będzie otwarty. Rozważamy odwzorowanie $f\colon \mathcal{U} \to Y$. Zapisujemy wzór

$$f(x+h) = f(x) + Ah + R(x,h) \qquad \text{gdzie } A \in B(X,Y),\ x,h \in X$$

DEFINICJA Mówimy, że f jest różniczkowalne w x, jeśli istnieje odwzorowanie liniowe i ciągłe A takie, że reszta R spełnia warunek

$$(*) \qquad \frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Odwzorowanie A nazywamy pochodną f w punkcie x.

Załóżmy, że f jest różniczkowalne. Sprawdźmy czy pochodna jest dobrze określona. Niech A_1, A_2 będą elementami $B(X,Y)$ takimi, że zachodzi $(*)$ dla R_1, R_2

$$\frac{1}{\|h\|}\Big(R_1(x,h) - R_2(x,h)\Big) = \frac{1}{\|h\|}\Big(f(x+h) - f(x) - A_1h - f(x+h) + f(x) + A_2h\Big) = \frac{1}{\|h\|}\left(A_2h - A_1h\right) = (A_2 - A_1)\frac{h}{\|h\|}$$

Ze względu na $(*)$ zachodzi

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\Big(R_1(x,h) - R_2(x,h)\Big) = \lim_{h\to 0} (A_2 - A_1)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \ (*)$$

← zauważmy, że wektor ten ma normę 1

Załóżmy teraz, że $A_1 \neq A_2$, tzn. $A_2 - A_1 \neq 0$. Istnieje zatem przynajmniej jeden wektor $v \in X$ taki, że $(A_2 - A_1)v \neq 0$. Wektor ten można wziąć długości 1. Podsumowując, istnieje v, $\|v\| = 1$, $(A_2 - A_1)v \neq 0$, zatem także $\|(A_2 - A_1)v\| \neq 0$. Dla dowolnego ciągu (v_n) zbieżnego do v mamy, na podstawie ciągłości A_2 i A_1, że $(A_2 - A_1)v_n \longrightarrow (A_2 - A_1)v \neq 0$. Ciąg v_n wybieramy tak, żeby $\|v_n\| = 1$. To można zrobić dzieląc wyrazy ciągu przez ich $\|\ \|$. Dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu liczbowego $\|(A_2 - A_1)v_n\|$ są oddzielone od 0, w szczególności zachodzi $\|(A_2 - A_1)v_n\| > \frac{1}{m}$.
Weźmy ciąg $h_n = \frac{1}{n} v_n$. Mamy $h_n \longrightarrow 0$, zatem $(*)$ $\lim_{n\to\infty} (A_2 - A_1)\frac{h_n}{\|h_n\|} \longrightarrow 0$, ale $\frac{h_n}{\|h_n\|} = v_n$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(A_2 - A_1)\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\| > \frac{1}{m}$$

← sprzeczność!!! Wynika z tego, że $A_1 = A_2$, tzn. pochodna, jeśli istnieje, to jest jedyna.

Pochodną odwzorowania f w punkcie x oznaczamy tradycyjnie $f'(x)$. Zauważmy, że jeśli f jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathcal{U}$, to f' jest odwzorowaniem

$$f'\colon X \supset \mathcal{U} \longrightarrow B(X,Y) \qquad \text{podczas gdy} \qquad f\colon X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$$

Pochodna jest więc innym obiektem matematycznym niż wyjściowe odwzorowanie. Zauważmy także, że ciągłość pochodnej $f'(x)$ występująca w definicji dotyczy ciągłości $f'(x)$ jako odwzorowania liniowego, czyli względem przyrostu h. Czym innym, jeszcze przez nas nie dyskutowanym, jest ciągłość pochodnej jako odwzorowanie $f'\colon \mathcal{U} \to B(X,Y)$, czyli względem x.

Pochodną zdefiniowaną jak wyżej nazywamy pochodną mocną albo pochodną Fréchet (Fresze (ta))

PRZYKŁADY

(1) Przykład w nieskończonym wymiarze $X = \mathcal{C}([0,1])$ $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

$f: X \to X$ $f(v)(t) = \int_0^t v^2(x)\,dx$

$$f(v+h)(t) = \int_0^t (v+h)^2(x)\,dx = \int_0^t \left(v^2(x) + 2v(x)h(x) + h^2(x)\right)dx = \int_0^t v^2(x)\,dx + 2\int_0^t v(x)h(x)\,dx + \int_0^t h^2(x)\,dx =$$

$$= f(v)(t) + \underbrace{2\int_0^t v(x)h(x)\,dx}_{(Ah)(t)} + \underbrace{\int_0^t h^2(x)\,dx}_{R(v,h)(t)}$$

$(Ah)(t) = 2\int_0^t v(x)h(x)\,dx$

jest to odwzorowanie liniowe ze względu na h
Trzeba sprawdzić czy jest ciągłe

$$\|Ah\| = \sup_{t\in[0,1]} |Ah(t)| = \sup_t \left|2\int_0^t v(x)h(x)\,dx\right| \le 2\sup_t \int_0^t |v(x)h(x)|\,dx = 2\int_0^1 |v(x)h(x)|\,dx \le 2\sup_x |h(x)| \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 |v(x)|\,dx = \underbrace{2\int_0^1 |v(x)|\,dx}_{\text{wyrażenie stałe, tzn niezależne od } h} \|h\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

tzn A jest odwzorowaniem ciągłym. Można policzyć $\|A\|$

$\|A\| \le 2\int_0^1 |v(x)|\,dx$ Jeśli v jest stałego znaku możemy wziąć $h = \pm 1$ do zrealizowania równości. Jeśli nie, trzeba brać odpowiedni ciąg h_n. Nie będziemy się w to zagłębiać. Tak czy inaczej

$$\|A\| = 2\int_0^1 |v(x)|\,dx$$

Pozostaje badanie reszty

$$\|R(v,h)\| = \sup_t \left|\int_0^t h^2(x)\,dx\right| = \int_0^1 h^2(x)\,dx \le \|h\|^2 \qquad \frac{\|R(v,h)\|}{\|h\|} \le \frac{\|h\|^2}{\|h\|} \le \|h\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

funkcja podcałkowa nieujemna

Odwzorowanie f jest różniczkowalne w każdym punkcie $v \in X$. Wartość pochodnej dana jest wzorem

$$(f'(v)h)(t) = 2\int_0^t v(x)h(x)\,dx$$

(2) Przykład skończeniewymiarowy $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto x\cos y \in \mathbb{R}$

$$(x+\delta x)\cos(y+\delta y) = (x+\delta x)(\cos y\cos\delta y - \sin y\sin\delta y) = (x+\delta x)\left(\cos y\left[1 - \frac{\delta y^2}{2} + O(\delta y^4)\right] - \sin y\left[\delta y - \frac{\delta y^3}{6}\right.\right.$$

$$\left.\left. + O(\delta y^5)\right]\right) = (x+\delta x)\left[\cos y + \cos y\, O(\delta y^2) - \sin y\,\delta y + \sin y\, O(\delta y^3)\right] = x\cos y + x\cos y\, O(\delta y^2) - x\sin y\,\delta y$$

$$+ x\sin y\, O(\delta y^3) + \cos y\,\delta x + \cos y\,\delta x\, O(\delta y^2) - \sin y\,\delta x\,\delta y + \sin y\,\delta x\, O(\delta y^3) =$$

$$\underset{g(x,y)}{x\cos y} + \underbrace{\begin{bmatrix}\cos y & -x\sin y\end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix}}_{h} + \underbrace{x\cos y\, O(\delta y^2) + x\sin y\, O(\delta y^3) + \cos y\,\delta x\, O(\delta y^2) - \sin y\,\delta x\,\delta y + \sin y\,\delta x\, O(\delta y^3)}_{R(x,y,\delta x,\delta y)}$$

Zauważmy, że R jest przynajmniej kwadratowe w $\delta x, \delta y$

$$R(x,y,\delta x,\delta y) = O(\delta y^2) + O(\delta x)\,O(\delta y)$$

W tym przykładzie nie musimy sprawdzać ciągłości A, gdyż $A\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ wobec tego jest ciągłe. Musimy za to sprawdzić własności reszty w $\mathbb{R}^2$. Wybieramy normę max, tzn $\|(\delta x,\delta y)\| = \max\{|\delta x|,|\delta y|\}$. Warunek $h\to 0$ oznacza $\max\{|\delta y|,|\delta x|\}\to 0$, czyli obie współrzędne spełniać muszą $\delta x\to 0$ i $\delta y\to 0$. Możemy zatem zbadać zachowanie poszczególnych składników reszty

$$\frac{O(\delta y^2)}{\|(\delta x,\delta y)\|} = \frac{c\,\delta y^2 + O(\delta y^3)}{\max\{|\delta x|,|\delta y|\}} \leq \frac{c\,\delta y^2+O(\delta y^3)}{|\delta y|} \leq c|\delta y| + O(\delta y^2) \xrightarrow{\delta y\to 0} 0$$

$$\frac{O(\delta x)O(\delta y)}{\|(\delta x,\delta y)\|} = \frac{c\,\delta x\delta y + \delta y\, O(\delta x^2)+\delta x\, O(\delta y^2)}{\max\{|\delta x|,|\delta y|\}} \leq \frac{c\,\delta x\delta y + \delta y\, O(\delta x^2)+\delta x\, O(\delta y^2)}{|\delta y|} = c\,\delta x\,\mathrm{sgn}\,\delta y +$$

$$\mathrm{sgn}\,\delta y\; O(\delta x^2) + \delta x\,\mathrm{sgn}\,\delta y\; O(\delta y) \xrightarrow[\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}]{} 0$$

Reszta w tym przykładzie spełnia (*), wobec tego $g'(x,y) = [\cos y \quad -x\sin y]$

UWAGI (1) Odwzorowanie $f\colon X\to Y$ różniczkowalne w $x\in X$ jest ciągłe w x. Jest to oczywiste gdyż skoro $R(x,h)$ spełnia (*) to także $R(x,h)\xrightarrow{h\to 0}0$. Wobec ciągłości $f'(x)$ mamy $\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0}\big(f(x)+\underbrace{f'(x)h}_{0}+\underbrace{R(x,h)}_{0}\big) = f(x)$

(2) Odwzorowanie $T\colon X\to Y$ liniowe i ciągłe (tzn $T\in B(X,Y)$) jest różniczkowalne w każdym punkcie i $T'(x)h = Th$, tzn $T'(x)=T$ dla dowolnego x

(3) Dla $f,g\colon X\to Y$ różniczkowalnych w $x\in X$ obowiązuje wzór $(\alpha f+\beta g)'(x) = \alpha f'(x)+\beta g'(x)$ dowód łatwy i nudny pomijamy

(4) Z zestawu „podstawowe prawa różniczkowania" nieco uwagi wymaga różniczkowanie złożenia odwzorowań

STWIERDZENIE $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, f różniczkowalne w x, g różniczkowalne w $f(x)$. Wtedy $g\circ f$ jest różniczkowalne w x i zachodzi

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\circ f'(x)$$

składanie odwzorowań liniowych

Złożenie odwzorowań ciągłych jest jak wiadomo ciągłe. Dla normy operatorowej obowiązuje $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

DOWÓD

$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+R_f(x,h)$ $\quad g(y+k) = g(y)+g'(y)k+R_g(y,k)$

$$g\big(f(x)+\underbrace{f'(x)h+R_f(x,h)}_{k}\big) = g(f(x)) + g'(f(x))\big[f'(x)h+R_f(x,h)\big] + R_g(f(x),k) =$$

$$= g(f(x)) + \underbrace{g'(f(x))(f'(x)h)}_{g'(f(x))\circ f'(x)h} + g'(f(x))(R_f(x,h)) + R_g(f(x),k)$$

$$\frac{\|R_g(f(x), f'(x)h+R_f(x,h))\|}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\|R_g(f(x),f'(x)h+R_f(x,h))\|}{\|f'(x)h+R_f(x,h)\|}}_{\xrightarrow{h\to 0}0}\cdot\frac{\|f'(x)h+R_f(x,h)\|}{\|h\|}\leq\|f'(x)\|+\frac{\|R_f(x,h)\|}{\|h\|}$$

ograniczone!

$$\frac{\|g'(f(x))(R_f(x,h))\|}{\|h\|}\leq\frac{\|g'(f(x))\|\,\|R_f(x,h)\|}{\|h\|}\xrightarrow{h\to 0}0$$

FAKT $f\colon X\to Y$, $\alpha\colon X\to\mathbb{R}$. Jeśli f i α są różniczkowalne w x_0 to $x\mapsto\alpha(x)f(x)$ jest różniczkowalne w x_0 i

$$(\alpha f)'(x)h=(\alpha'(x)h)f(x)+\alpha(x)f'(x)h$$

$$\alpha'(x)\in B(X,\mathbb{R})$$

$$\alpha'(x)h\in\mathbb{R}$$

DOWÓD Oczywisty

Obliczanie pochodnej z definicji jest zazwyczaj niepraktyczne. Wprowadźmy teraz pewne ułatwiające życie pojęcie. Niech X,Y będą p. Banacha, weźmy $U\subset X$, $x\in U$, $f\colon U\to Y$

DEFINICJA Mówimy, że odwzorowanie f ma pochodną kierunkową w kierunku $v\in X$ jeśli istnieje

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

Pochodną kierunkową oznaczamy $\nabla_v f(x)$

FAKT Pochodne kierunkowe, jeśli istnieją, są jednorodne, tzn. $\nabla_{\lambda v}f=\lambda\nabla_v f$

DOWÓD

$$\nabla_{\lambda v}f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{(f(x+t\lambda v)-f(x))\lambda}{\lambda t}=\lambda\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\lambda v)-f(x))}{(\lambda t)}=\lambda\lim_{s\to 0}\frac{f(x+sv)-f(x)}{s}=\lambda\nabla_v f(x)\ \blacksquare$$

FAKT Jeśli f jest różniczkowalne w x to pochodne kierunkowe istnieją w x w każdym kierunku i jest równe $\nabla_v f(x)=f'(x)v$

DOWÓD

$$\nabla_v f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{f(x)}+\overset{t\,f'(x)v}{f'(x)tv}+R(x,tv)-\cancel{f(x)}}{t}=\lim_{t\to 0}\left(f'(x)v+\frac{R(x,tv)}{t}\right)=$$

$$=f'(x)v+\lim_{t\to 0}\frac{R(x,tv)\|v\|}{t\|v\|}=f'(x)v+\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{R(x,tv)}{\operatorname{sgn}t\|tv\|}}_{\to 0}\|v\|=f'(x)v\ \blacksquare$$

Pochodnej można więc poszukiwać w postaci pochodnej kierunkowej, a potem sprawdzać, czy odwzorowanie $v\mapsto\nabla_v f(x)$ jest liniowe i ciągłe oraz czy zachodzi stosowna reszta. Należy jednak mieć na uwadze, że samo istnienie pochodnej kierunkowej jest warunkiem dość słabym. Otwieramy mniejszym galerię funkcji dziwnych

(1) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ — w punkcie $(0,0)$ ma pochodną kierunkową w $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, w pozostałych kierunkach pochodna nie istnieje

(2) $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$g(x,y)=\begin{cases}x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

pochodne kierunkowe istnieją we wszystkich kierunkach, ale odwzorowanie $v\mapsto\nabla_v g(0,0)$ nie jest liniowe

$$g(t\delta x,t\delta y)=t\delta x\frac{t^2\delta x-t^2\delta y}{t^2\delta x+t^2\delta y}=t\left[\delta x\frac{\delta x^2-\delta y^2}{\delta x^2+\delta y^2}\right]$$

$$\nabla_v g(0,0)=\delta x\frac{\delta x^2-\delta y^2}{\delta x^2+\delta y^2}\qquad v=\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}$$

jednorodne ale nie liniowe

(3) $h(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^4+y^2}$, $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h(0,0)=0$ — Ma pochodną kierunkową w każdym kierunku, pochodna kierunkowa jest liniowa ale h nie jest różniczkowalna w $(0,0)$

$$h(t\delta x, t\delta y) = (t\delta x\, t^2\delta y^2) / (t^4\delta x^4 + t^2\delta x^2) = t\,\frac{\delta x\,\delta y^2}{t^2\delta x^4 + \delta y^2}$$

$$\frac{h(t\delta x, t\delta y) - h(0,0)}{t} = \frac{\delta x\,\delta y^2}{t^2(\delta x^4) + \delta y^2} \xrightarrow{t\to 0} \frac{\delta x\,\delta y^2}{\delta y^2} = \delta x \qquad \nabla_v h(0,0) = \delta x$$

$$v \longmapsto \nabla_v h(0,0) \leftarrow [1,0]$$

$$\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} \longmapsto \delta x$$

$$h(0+\delta x, 0+\delta y) = h(0,0) + [1,0]\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R(0,0,\delta x,\delta y)$$

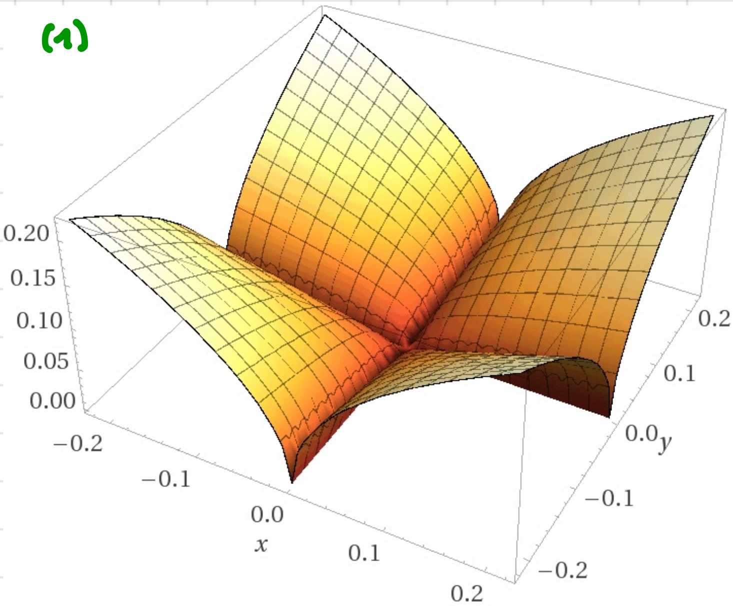
$$R(0,0,\delta x,\delta y) = \frac{\delta x\,\delta y^2}{\delta x^4 + \delta y^2} - \delta x = \frac{\cancel{\delta x\,\delta y^2} - \delta x^5 - \cancel{\delta x\,\delta y^2}}{\delta x^4 + \delta y^2} = \frac{\delta x^5}{\delta x^4 + \delta y^2}$$

$$R(0,0,\tfrac{1}{n},0) = \frac{1/n^5}{\frac{1}{n^4} + 0} = \frac{1}{n} \qquad \frac{R(0,0,\frac{1}{n},0)}{\frac{1}{n}} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

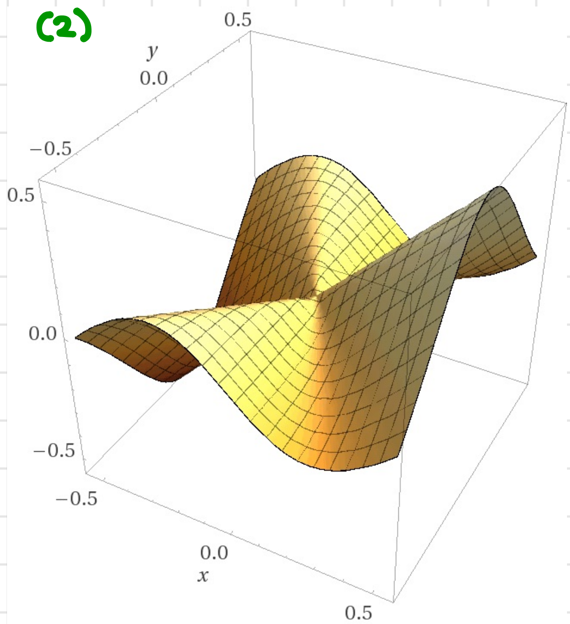
R nie spełnia warunku bycia resztą

DEFINICJA Jeśli dla $x \in \mathcal{U}$ pochodne kierunkowe odwzorowania $f\ \mathcal{U} \longrightarrow Y$ istnieją w każdym kierunku, $v \longmapsto \nabla_v f$ jest liniowe i ciągłe to mówimy że f jest **słabo różniczkowalne**. Odwzorowanie $v \longmapsto \nabla_v f$ nazywamy **słabą pochodną** albo **pochodną Gateaux**

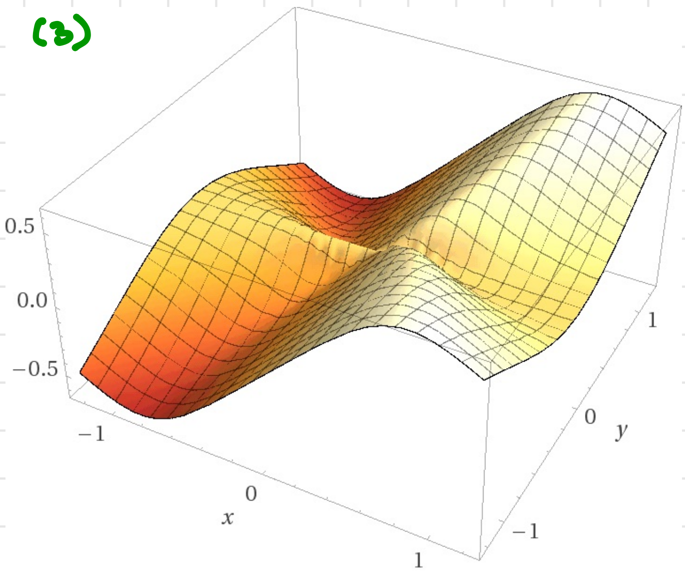
(1)



(2)



(3)



Zdefiniowaliśmy już dwa rodzaje pochodnych: mocne (Fréchet'a) i słabe (Gateaux). Rozważa się jeszcze pochodną w kierunku podprzestrzeni. Jeśli $X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{U}_1 \subset X_1$, $\mathcal{U}_2 \subset X_2$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Pochodną cząstkową odwzorowania f $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow Y$ w kierunku podprzestrzeni X_1 (X_2) nazywamy mocną pochodną odwzorowania

$$X_1 \supset \mathcal{U}_1 \ni \xi \longmapsto f(\xi, x_2) \in Y \qquad \left(X_2 \supset \mathcal{U}_2 \ni \eta \longmapsto f(x_1, \eta) \in Y \right)$$

$$f'_{X_1}(x_1, x_2) \qquad\qquad f'_{X_2}(x_1, x_2)$$

Pochodne w kierunku podprzestrzeni przydadzą się później

POCHODNE ODWZOROWANIA $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Odwzorowanie f $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ „składa się" z m funkcji f^i $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \quad (x_1 \ x_n) \longmapsto (f^1(x), \ \ , f^m(x))$$

Załóżmy, że f jest różniczkowalna w $p \in \mathbb{R}^n$. Pochodna $f'(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest więc macierzą mającą n kolumn i m wierszy. j-ta kolumna macierzy to $f'(p)e_j$ zapisane w bazie kanonicznej

to jest „kawałek" słabej pochodnej, tzn $f'(p)e_j = \nabla_{e_j} f(p) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(p+te_j) - f(p)}{t} =$

$$= \lim_{t \to 0} \begin{bmatrix} f^1(p+te_j) - f^1(p) \\ f^2(p+te_j) - f^2(p) \\ f^m(p+te_j) - f^2(p) \end{bmatrix}$$

Wyraz x^i_j macierzy $f'(p)$ to zatem

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(p_1, \ , p_j + t, p_{j+1} \ p_n) - f^i(p)}{t} = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(p)$$

inne oznaczenie $\partial_j f^i$, f^i_j, $f^i_{x_j}$

Podsumowując, jeśli f $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w p to $f'(p)$ zapisuje się macierzą

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m}{\partial x^2} & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}}_{n} \Bigg\} m$$

Macierz pochodnej, *Macierz Jacobiego*

Sprawdzanie różniczkowalności odwzorowania jest czasem dość kłopotliwe, tzn wymaga badania reszty nawet w przypadku $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Najwygodniej byłoby nam umieć stwierdzić różniczkowalność na podstawie pewnej wiedzy na pochodne cząstkowe $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}$. Stosowne twierdzenie istnieje, ale żeby je udowodnić potrzebujemy jeszcze dodatkowych narzędzi. Sformułujmy to twierdzenie

TWIERDZENIE X, Y p. Banacha, f $X \longrightarrow Y$ jest słabo różniczkowalne na $\mathcal{U} \subset X$. Jeśli słaba pochodna ∇f traktowana jako odwzorowanie $\mathcal{U} \ni x \longmapsto \nabla f(x) \in B(X,Y)$ jest ciągła na $\mathcal{U}$, to f jest klasy C^1 na $\mathcal{U}$, tzn mocna pochodna $f'(x)$ istnieje i jest ciągła jako odwzorowanie $\mathcal{U} \ni x \longmapsto f'(x) \in B(X,Y)$. Oczywiście $f'(x) = \nabla f(x)$

ciągłe jako odwz liniowe

ciągłe jako odwz o wartościach w $B(X,Y)$

Zauważmy że rozważa się tu dwie ciągłości $h \longmapsto f'(x)h$ $\quad x \longmapsto f'(x) \in B(X,Y)$

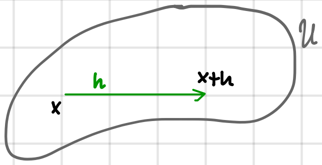
TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ (żeby udowodnić twierdzenie o różniczkowaniu w sposób ciągły)

Dla funkcji różniczkowalnych $I \to \mathbb{R}$ obowiązuje Tw Lagrange'a $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$ dla pewnego c. Dla $I \to \mathbb{R}^2$ nie mamy tu proste uogólnienie $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$

$$f_1'(c_1)(b-a) = f_1(b)-f_1(a), \quad f_2'(c_2)(b-a) = f_2(b)-f_2(a)$$ i nie ma powodu aby $c_1 = c_2$

W wielowymiarowym czy Banachowskim przykładzie mamy jedynie oszacowanie

TWIERDZENIE X, Y p Banacha, $f \; X \supset \mathcal{U} \to Y$ słabo różniczkowalna na $\mathcal{U}$



$$\|f(x+h)-f(x)\| \leq \|h\| \sup_{t \in]0,1[} \|\nabla f(x+th)\|$$

DOWÓD Dowód tego twierdzenia opiera się na istnieniu wystarczająco bogatej przestrzeni funkcjonałów liniowych ciągłych czyli przestrzeni $B(Y,\mathbb{R})$. Istnieje twierdzenie, które mówi, że na przestrzeni unormowanej dla każdego wektora $x \neq 0$ istnieje $\varphi \in B(X,\mathbb{R})$ taki, że $\|\varphi\| = 1$ i $\varphi(x) = \|x\|$

Weźmy $\varphi \in B(Y,\mathbb{R})$ i skonstruujmy funkcję $\varphi_f \; [0,1] \ni t \mapsto \langle \varphi, f(x+th) \rangle \in \mathbb{R}$. Sprawdźmy różniczkowalność tej funkcji

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\varphi_f(t+s) - \varphi_f(t)\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\langle \varphi, f(x+th+sh)\rangle - \langle \varphi, f(x+th)\rangle\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \langle \varphi, f(x+th+sh) - f(x+th)\rangle =$$

$$= \langle \varphi, \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f(x+th+sh) - f(x+th)\right) \rangle = \langle \varphi, \nabla_h f(x+th) \rangle$$ φ_f jest różniczkowalna na $]0,1[$

ciągłość φ

φ_f jest także ciągła na $[0,1]$. Ciągłość na końcach wynika z faktu istnienia ∇f. Słaba różniczkowalność nie pociąga co prawda ciągłości, ale pociąga ciągłość wzdłuż prostych, tzn $f(p+sh) \xrightarrow{s\to 0} f(p)$ dla $p \in \mathcal{U}$

φ_f spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a tzn istnieje $\xi \in]0,1[$ takie, że

$$\underbrace{\varphi_f(1) - \varphi_f(0)}_{\langle \varphi, f(x+h)\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle} = \underbrace{\varphi_f'(\xi)}_{\langle \varphi, \nabla_h f(x+\xi h)\rangle}$$

zależy od φ

Trzeba teraz pozbyć się φ. Idea jest taka $\varphi \in B(Y,\mathbb{R})$ tzn φ jest funkcją na Y. Mamy jednak także, dla $y \in Y$ $\varphi \xmapsto{F_y} \langle \varphi, y \rangle$, tzn y jest funkcją liniową na $B(Y,\mathbb{R})$. Odwzorowanie to jest ograniczone $\sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\langle \varphi, y\rangle|$. Wiemy, że $|\langle \varphi, y\rangle| \leq \|\varphi\| \|y\|$ tzn $\sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\langle \varphi, y\rangle| \leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \|\varphi\| \|y\| = \|y\|$

$\|F_y\| \leq \|y\|$. Pytamy, czy $\|F_y\| = \|y\|$? Z zielonej uwagi wynika że wartość $\|y\|$ można zrealizować. Oznacza to że $\|y\|$ można policzyć jak normę operatorową

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\langle \varphi, f(x+h) - f(x)\rangle| = \sup_{\varphi \leq 1} |\langle \varphi, \nabla_h f(x+\xi_\varphi h)\rangle| \leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \|\varphi\| \|\nabla_h f(x+\xi_\varphi h)\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla_h f(x+th)\| \leq \|h\| \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla f(x+th)\| \quad \blacksquare$$

Oczywiście jeśli f jest różniczkowalna $\nabla_h f(x) = f'(x)h$, oszacowanie z twierdzenia przyjmuje postać

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\| \sup_{t\in]0,1[} \|f'(x+th)\|$$

Twierdzenie o wartości średniej przyda nam się do udowodnienia małego twierdzenia o różniczkowaniu w sposób ciągły

DOWÓD

f jest słabo różniczkowalne, zatem $\nabla f(x)$ istnieje i jest elementem $\mathcal{B}(X,Y)$. Do różniczkowalności potrzebujemy własności reszty

$$R(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla_h f(x_0)$$

Definiujemy $g\ \mathcal{U} \to Y$ $g(x) = f(x) - \nabla_x f(x_0)$ g jest słabo różniczkowalne i $\nabla g = \nabla f - \nabla f(x_0)$

$$g(x_0+h) - g(x_0) = f(x_0+h) - \nabla_{x_0+h} f(x_0) - f(x_0) + \nabla_{x_0} f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla_h f(x_0)$$

$$\|R(x_0,h)\| = \|g(x_0+h) - g(x_0)\| \leqslant \|h\| \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla g(x_0+th)\| = \|h\| \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla f(x_0+th) - \nabla f(x_0)\|$$

$$\frac{\|R(x_0,h)\|}{\|h\|} \leqslant \sup_{t\in]0,1[} \|\nabla f(x_0+th) - \nabla f(x_0)\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$ z ciągłości $\nabla f(x)$ względem x ■

Twierdzenie powyższe działa oczywiście także dla odwzorowań $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jednak wiemy, że istnienie pochodnych kierunkowych (a więc wyrażeń $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$) nie gwarantuje liniowości, tzn. macierz zbudowana z pochodnych cząstkowych nie zawsze jest macierzą słabej pochodnej (tzn. macierz można napisać mimo, że słaba pochodna nie istnieje). Dotychczasowe twierdzenie cały czas nie wystarcza do udowodnienia różniczkowalności na podstawie własności pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$

Zapiszmy więc w końcu i udowodnijmy odpowiednie twierdzenie

TWIERDZENIE Jeśli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ istnieją i są ciągłe to odwzorowanie $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \overset{F}{\longmapsto} (f^1, f^2, \ldots, f^m)$ jest różniczkowalne w sposób ciągły

DOWÓD

Kandydatem na pochodną jest oczywiście $(h^i) \longmapsto \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j\right)$. Szacujemy resztę

$$\|F(x^1+h^1, \ldots, x^n+h^n) - F(x^1, \ldots, x^n) - \sum_{j,i} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\| = \|F(x^1+h^1, x^2+h^2, \ldots) - F(x^1, x^2+h^2, \ldots) + F(x^1, x^2+h^2, \ldots) - \sum_{j,i} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\|$$

(e_i – baza kanoniczna w $\mathbb{R}^n$)

$$\leqslant \|F(x^1+h^1, x^2+h^2, \ldots) - F(x^1, x^2+h^2, \ldots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1} h^1 e_i\| + \|F(x^1, x^2+h^2, \ldots) - \sum_{j=2}^{n} \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in]0,1[} \|\sum_i \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1+th^1, x^2+h^2, \ldots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1, x^2, \ldots)\right] e_i\| +$$

$$+ \|F(x^1, x^2+h^2, x^3+h^3, \ldots) - F(x^1, x^2, x^3+h^3) - \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^2} h^2 e_i\| + \|F(x^1, x^2, x^3+h^3, \ldots) - \sum_{j=3}^{n} \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j} h^j e_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in]0,1[} \|\sum_i \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1+th^1, x^2+h^2, \ldots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1, x^2, \ldots)\right] e_i\| \, |h^1| + \sup_{t\in]0,1[} \|\sum_i \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^2}(x^1, x^2+th^2, x^3+h^3) - \frac{\partial f^i}{\partial x^2}(x^1, x^2, \ldots)\right] e_i\| \, |h^2| +$$

$$+ \ldots + \sup_{t\in]0,1[} \|\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x^1, x^2, \ldots, x^n+th^n) - \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x^1, x^2, \ldots x^n)\| \, |h^n| \leqslant \alpha(h) \|h\|$$

pewna funkcja od h o której wiadomo, że $\alpha(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$ ■

Tw. o wartości średniej zastosowane do odwzorowania $g: \mathbb{R} \ni s \longmapsto F(x^1+s, x^2+h^2, \ldots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1} s \cdot e_i$. Ma ono słabą pochodną dla każdego $s \in [0, h^1]$

$$\nabla_v g(s) = \lim_{t\to 0} \frac{g(s+tv) - g(s)}{t} = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1+s, x^2+h \ldots) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x^1, x^2 \ldots)\right] v e_i$$