SEMESTR II WYKŁAD 4 WYŻSZE POCHODNE, EKSTREMA

Naszym celem jest teraz zdefiniowanie wyższych pochodnych odwzorowań między przestrzeniami Banacha. Zauważmy, że jeśli $f: X\supset U \to Y$ to $f': X\supset U \to B(X,Y)$. Kolejna pochodna powinna więc być odwzorowaniem $U \to B(X, B(X,Y))$. Należałoby więc rozważyć odwzorowanie liniowe o wartościach w przestrzeni odwzorowań liniowych.

Niech $L(n,X,Y)$ oznacza zbiór odwzorowań n-liniowych z $\underbrace{X\times\dots\times X}_{n \text{ razy}}$ do Y

STWIERDZENIE Istnieje kanoniczny izomorfizm $L(X, L(X, L(\dots L(X,Y))\dots)) \simeq L(n,X,Y)$

DOWÓD oczywisty

Do wyjaśnienia pozostają następujące problemy: czy na poziomie odwzorowań ograniczonych też mamy izomorfizm $B(n,X,Y) \simeq B(X, B(X, \dots B(X,Y)\dots))$? Co to w ogóle jest $B(n,X,Y)$? Jak zdefiniować normę odwzorowania wieloliniowego itd.

STWIERDZENIE Niech $F: \underbrace{X\times\dots\times X}_{n} \to Y$ będzie odwzorowaniem n-liniowym. Równoważne są warunki (1) F jest ciągłe (2) F jest ciągłe w 0 (3) F jest ograniczone, tzn. $\sup_{\|x_i\|\le 1} \|F(x_1,\dots,x_n)\| < \infty$

DOWÓD

Dowód przebiega podobnie do przypadku $L(X,Y)$. W $X\times\dots\times X$ używamy normy $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \max_i \|x_i\|$. Przeprowadzenie tego dowodu według schematu $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$

DEFINICJA Liczbę $\sup_{\|x_i\|\le 1} \|F(x_1,\dots,x_n)\|$ nazywamy normą odwzorowania F i oznaczamy $\|F\|$

Łatwo sprawdzić, że $F \mapsto \|F\|$ jest rzeczywiście normą. Odwzorowania ograniczone ze zbioru $L(n,X,Y)$ oznaczamy $B(n,X,Y)$. Jeśli X,Y są p. Banacha to $B(n,X,Y)$ także jest p. Banacha. Pozostaje do sprawdzenia jak się ma $B(n,X,Y)$ do $B(X,B(X,\dots B(X,Y)\dots))$. Okazuje się że zachodzi następujące stwierdzenie

STWIERDZENIE Niech $F\in B(X,B(X,\dots B(X,Y)\dots))$. Oznaczmy $Q_F \in L(n,X,Y)$ odwzorowanie $Q_F(x_1,\dots,x_n) = ((Fx_1)x_2\dots)x_n)$. $Q_F\in B(n,X,Y)$, ponadto $F\mapsto Q_F$ jest izometrycznym izomorfizmem $B(X,B(X,\dots B(X,Y)\dots))$ i $B(n,X,Y)$

DOWÓD Przeprowadźmy dla przypadku $n=2$. $F\in B(X,B(X,Y))$ tzn. $\|F\| = \sup_{\|x_1\|\le 1} \|\underbrace{Fx_1}_{\in B(X,Y)}\|$

$\|Fx_1\| = \sup_{\|x_2\|\le 1}\|\underbrace{(Fx_1)x_2}_{\in Y}\|$, podsumowując $\|F\| = \sup_{\|x_1\|\le 1}\sup_{\|x_2\|\le 1}\|(Fx_1)x_2\| =$

$= \sup_{\|x_1\|\le 1}\sup_{\|x_2\|\le 1}\|Q_F(x_1,x_2)\| = \|Q_F\|$. Dla dowolnego n dowód przebiega identycznie, jedynie napisy są dłuższe. Pokazaliśmy że obraz $F\mapsto Q_F$ leży w $B(2,X,Y)$ i jest to izometria. Odwzorowanie to jest też odwracalne. Weźmy $Q\in B(2,X,Y)$ i zdefiniujmy $F_Q\in B(X,B(X,Y))$ wzorem $F_Q(x) = Q(x, \cdot\,)$

$\|Q\| = \sup_{\substack{\|x_1\|\le 1\\ \|x_2\|\le 1}} \|Q(x_1,x_2)\| = \sup_{\|x_2\|\le 1}\sup_{\|x_1\|\le 1}\|F_Q(x_1)x_2\| = \|F_Q\|$ tzn. odwzorowanie $Q\mapsto F_Q$ ma obraz w $B(X,B(X,Y))$. Jest jasne, że $F\mapsto Q_F$, $Q\mapsto F_Q$ są wzajemnie odwrotne ∎

DEFINICJA Niech $f: X \supset \mathcal{U} \to Y$ będzie różniczkowalne w każdym punkcie $x \in \mathcal{U}$. Mówimy, że f jest różniczkowalna dwa razy w $x_0 \in \mathcal{U}$ jeśli istnieje pochodna odwzorowania $f': \mathcal{U} \to B(X,Y)$. Pochodną tę oznaczamy $f''(x_0)$. Jest ona elementem $B(X, B(X,Y)) \simeq B(2,X,Y)$.

Pochodną rzędu k definiujemy indukcyjnie jako pochodną odwzorowania $f^{(k-1)}: \mathcal{U} \to B(X, B(X, \dots B(X,Y)$. Pochodne drugiego i wyższych rzędów traktujemy zazwyczaj jako odwzorowania wieloliniowe, tzn. elementy $B(k,X,Y)$.

Wśród odwzorowań wieloliniowych wyróżniamy odwzorowania wieloliniowe symetryczne, tzn. takie, że
$\forall \sigma \in S_k \quad Q(x_1, \dots, x_k) = Q(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$

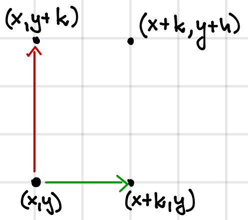
TWIERDZENIE Jeśli $f: X \supset \mathcal{U} \to Y$ jest odwzorowaniem k-krotnie różniczkowalnym, to k-ta pochodna $f^{(k)}(x_0)$ jest odwzorowaniem k-liniowym symetrycznym.

UWAGI NA TEMAT DOWODU Twierdzenie wydaje się proste, ale jego dowód w całej ogólności jest wielce paskudny. Przeprowadzimy prostsze rozważania w szczególnych przypadkach.

Jeżeli funkcja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^k}$ ciągłe w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}^n$, to pochodne te są symetryczne, tzn.

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^j \partial x^k}(x_0) = \frac{\partial f^l}{\partial x^k \partial x^j}(x_0)$$

Zauważmy, że wystarczy rozważyć $m=1$, $n=2$. Dla jasności zapisu współrzędne punktu $x_0 \in \mathbb{R}^2$ oznaczymy (x,y). Pokazywać więc będziemy, że $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$. Weźmy przyrosty h w kierunku x i k w kierunku y i rozważmy wielkość



$$A(h,k) = \frac{1}{hk}\left[f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)\right]$$

Wyrazy możemy pogrupować na dwa sposoby

$$A(h,k) =$$

$$\frac{1}{hk}\Big[\big(f(x+h,y+k) - f(x+h,y)\big) - \big(f(x,y+k) - f(x,y)\big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{hk}\Big[\big(f(x+h,y+k) - f(x,y+k)\big) - \big(f(x+h,y) - f(x,y)\big)\Big]$$

Oznaczając $F(y) = f(x+h,y) - f(x,y)$, $G(x) = f(x,y+k) - f(x,y)$ mamy

$$A(h,k) = \frac{1}{hk}\big(G(x+h) - G(x)\big) = \frac{1}{hk}\big(F(y+k) - F(y)\big) = *$$

Funkcje F i G są różniczkowalne, wobec tego można do nich użyć tw. Lagrange'a

$\exists \xi \in]x, x+h[\quad G(x+h) - G(x) = h G'(\xi)$, $\quad \exists \eta \in [y, y+k] \quad F(y+k) - F(y) = k F'(\eta)$

$$* = \frac{1}{\cancel{h}k} \cancel{h} G'(\xi) = \frac{1}{h\cancel{k}} \cancel{k} F'(\eta) = \frac{1}{k} G'(\xi) = \frac{1}{h} F'(\eta) = **$$

Wracając do definicji F i G widzimy, że $G'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$

$F'(\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x+h, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)$

$$** = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)\right) = ***$$

funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ też są różniczkowalne, stosujemy więc tw Lagrange'a

$$*** = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi, \eta') = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\xi', \eta)$$

Podsumowując mamy

$$A(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta') = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta)$$

$h \to 0$, $k \to 0$

$\xi \to x$, $\eta' \to y$; $\xi' \to x$, $\eta \to y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

na mocy ciągłości drugich pochodnych cząstkowych

oznacza $\xi, \xi' \to x$, $\eta, \eta' \to y$

Ostatecznie $\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} A(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ ■

Jeśli $f: X \supset \mathcal{U} \to Y$ jest dwukrotnie różniczkowalne w $x_0 \in \mathcal{U}$ to $f''(x_0)$ jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym

Dowód dla ogólnych przestrzeni Banacha, dla drugiej pochodnej jest już trudniejszy. Pokażemy, że $\| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h)\| < \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$

Oznaczmy $\varphi: [0,1] \to Y$ $\quad \varphi(t) = f(x_0 + th + k) - f(x_0 + th)$

$\psi: [0,1] \to Y$ $\quad \psi(s) = f(x_0 + h + sk) - f(x_0 + sk)$

Zauważmy, że $\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_0 + h + k) - f(x_0 + h) - f(x_0 + h) + f(x_0) = \psi(1) - \psi(0)$

$$\| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h)\| = \| f''(x_0)(h,k) - \varphi(1) + \varphi(0) + \psi(1) - \psi(0) - f''(x_0)(k,h)\| \leq$$

$$\| f''(x_0)(h,k) - \varphi(1) + \varphi(0)\| + \| f''(x_0)(k,h) - \psi(1) + \psi(0)\|$$

różnią się o zamianę k i h — szacujemy jeden ze składników

$$\| \varphi(1) - \varphi(0) - f''(x_0)(h,k)\| = \| \varphi(1) - \varphi(0) + \varphi'(t) - \varphi'(t) - f''(h,k)\| \leq \underbrace{\| \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(t)\|}_{1} +$$

$$+ \underbrace{\| \varphi'(t) - f''(x_0)(h,k)\|}_{2}$$

2. $\varphi'(t) = f'(x_0 + th + k)h - f'(x_0 + th)h + f'(x_0)h - f'(x_0)h = [f'(x_0 + th + k) - f'(x_0)]h - [f'(x_0 + th) - f'(x_0)]h$