Wracając do definicji F i G widzimy, że $G'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$

$F'(\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x+h,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)$

$$** = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)\right) = \overset{*\,*}{*}$$

funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ też są różniczkowalne, stosujemy więc tw Lagrange'a

$$\overset{*\,*}{*} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi,\eta') = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\xi',\eta)$$

Podsumowując mamy

$$A(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta') = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi',\eta)$$

$h \to 0$, $k \to 0$

$\xi \to x$, $\eta' \to y$ $\qquad$ $\xi' \to x$, $\eta \to y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\eta)$$

na mocy ciągłości drugich pochodnych cząstkowych

oznaczenia

$\xi, \xi' \to x$

$\eta, \eta' \to y$

Ostatecznie $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} A(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ ■

Jeśli $f: X \supset U \to Y$ jest dwukrotnie różniczkowalne w $x_0 \in U$ to $f''(x_0)$ jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym

Dowód dla ogólnych przestrzeni Banacha, dla drugiej pochodnej jest już trudniejszy. Pokażemy, że $\| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h)\| < \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$

Oznaczmy $\varphi: [0,1] \to Y$ $\quad \varphi(t) = f(x_0 + th + k) - f(x_0 + th)$

$\psi: [0,1] \to Y$ $\quad \psi(s) = f(x_0 + h + sk) - f(x_0 + sk)$

Zauważmy, że $\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_0 + h + k) - f(x_0 + h) - f(x_0 + h) + f(x_0) = \psi(1) - \psi(0)$

$$\| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h)\| = \| f''(x_0)(h,k) - \varphi(1) + \varphi(0) + \psi(1) - \psi(0) - f''(x_0)(k,h)\| \leqslant$$

$$\| f''(x_0)(h,k) - \varphi(1) + \varphi(0)\| + \| f''(x_0)(k,h) - \psi(1) + \psi(0)\|$$

różnią się o zamianę k i h $\quad$ Szacujemy jeden ze składników

$$\|\varphi(1) - \varphi(0) - f''(x_0)(h,k)\| = \|\varphi(1) - \varphi(0) + \varphi'(t) - \varphi'(t) - f''(h,k)\| \leqslant \underbrace{\|\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(t)\|}_{1} + \underbrace{\|\varphi'(t) - f''(x_0)(h,k)\|}_{2}$$

2 $\quad \varphi'(t) = f'(x_0 + th + k)h - f'(x_0 + th)h + f'(x_0)h - f'(x_0)h = [f'(x_0 + th + k) - f'(x_0)]h - [f'(x_0 + th) - f'(x_0)]h$

25

② $\varphi'(t) = f'(x_0+th+k)h - f'(x_0+th)h + f'(x_0)h - f'(x_0)h = [f'(x_0+th+k) - f'(x_0)]h - [f'(x_0+th) - f'(x_0)]h$

$$\|\varphi'(t) - f''(x_0)(h,k)\| = \|[f'(x_0+th+k) - f'(x_0)]h - [f'(x_0+th) - f'(x_0)]h - f''(x_0)(h,k)\| =$$

$$\|[f'(x_0+th+k) - f'(x_0)]h - [f'(x_0+th) - f'(x_0)]h - \underbrace{f''(x_0)(h, k+th)} + \underbrace{f''(x_0)(h, th)}\| =$$

$$= \|[f'(x_0+th+k) - f'(x_0) - f''(x_0)(\ , k+th)]h - [f'(x_0+th) - f'(x_0) - f''(x_0)(\ , th)]h\| \leqslant$$

$$= \|f'(x_0+th+k) - f'(x_0) - f''(x_0)(\ , k+th)\|\,\|h\| + \|f'(x_0+th) - f'(x_0) - f''(x_0)(\ , th)\|\,\|h\| \leqslant$$

$v = k+th$ $\qquad$ $v = th$

$$f'(x_0+v) - f'(x_0) - (f')'(x_0)v = R(f', x_0, v)$$

$$\frac{\|R(f', x_0, v)\|}{\|v\|} < \varepsilon \quad \text{tzn} \quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta \quad \|v\|<\delta \to \frac{\|R(f', x_0, v)\|}{\|v\|} < \varepsilon$$

$$\leqslant \varepsilon\|th+k\|\,\|h\| + \varepsilon\|th\|\,\|h\| \underset{t\leqslant 1}{\leqslant} \varepsilon(\|h\| + \|k\| + \|h\|)\|h\| \leqslant 2\varepsilon\|h\|(\|h\|+\|k\|)$$

①

$$\|\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(t)\| \leqslant \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi'(s) - \varphi'(t)\| = \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi'(s) - f''(x_0)(h,k) + f''(x_0)(h,k) - \varphi'(t)\| \leqslant$$

tw o wartości średniej

$$\leqslant \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi'(s) - f''(x_0)(h,k)\| + \|\varphi'(t) - f''(x_0)(h,k)\|$$

było $\leqslant 2\varepsilon\|h\|(\|h\|+\|k\|)$

ostatecznie ①+② $\leqslant 6\varepsilon\|h\|(\|h\|+\|k\|)$ Drugi składnik różni się o zamianę k i h więc szacuje się przez $6\varepsilon\|k\|(\|h\|+\|k\|)$ Różnicę $f''(x_0)(k,h)$ i $f''(x_0)(h,k)$ mamy więc oszacowaną następująco

$$\|f''(x_0)(k,h) - f''(x_0)(h,k)\| \leqslant 6\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2$$

ε związane było z warunkiem $\|h\|<\delta$ i $\|h\|+\|k\|<\delta$, ogólnie rzecz biorąc zachodzi dla małych h i k ze względu na dowolność mamy jednak

$$\|f''(x_0)(k,h) - f''(x_0)(h,k)\| \leqslant 6\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2 \quad / \lambda^2$$

$$\|\lambda^2 f''(x_0)(k,h) - \lambda^2 f''(x_0)(h,k)\| \leqslant 6\varepsilon(|\lambda|\|h\| + |\lambda|\|k\|)^2$$

$$\|f''(x_0)(\lambda k,\lambda h) - f''(x_0)(\lambda h,\lambda k)\| \leqslant 6\varepsilon(\|\lambda h\| + \|\lambda k\|)^2$$

Oszacowanie zachodzi więc dla $(\lambda h, \lambda k)$ dla dowolnego λ, ε zaś jest dowolnie małe zatem $f''(x_0)(h,k) = f''(x_0)(k,h)$ ■

Dowód w sytuacji ogólnej można wywieść z tej szczególnej dla $k=2$ indukcyjnie, czego jednak robić nie będziemy

UWAGA Podobnie jak samo istnienie pochodnych kierunkowych nie gwarantuje różniczkowalności w sensie mocnym tak samo istnienie drugich pochodnych kierunkowych nie nie gwarantuje istnienia drugiej pochodnej. Jeśli odwzorowanie nie jest dwukrotnie różniczkowalne ale drugie pochodne kierunkowe istnieją mogą one nie być symetryczne. Kolejnym eksponatem w galerii funkcji dziwnych jest

$$f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(0,0)=0\ , \quad f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y)-f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\cancel{t}}\left(\cancel{t}y\frac{t^2-y^2}{t^2+y^2}-0\right) = -y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\cancel{t}}\left(x\cancel{t}\frac{x^2-t^2}{x^2+t^2}-0\right) = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = +1$$

!?

W tym przykładzie mieszane pochodne cząstkowe nie są ciągłe. W ogólności obowiązuje twierdzenie

TWIERDZENIE $f\ X\supset U \longrightarrow Y$ Jeśli w otoczeniu x_0 istnieją $\nabla_h\nabla_k f(x)$, $\nabla_k\nabla_h f(x)$ i są ciągłe w x_0 to są równe w x_0

Dla odwzorowań $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mamy

TWIERDZENIE Odwzorowanie $f\ \mathbb{R}^n\supset U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^k na U wtedy i tylko wtedy jeśli istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe rzędu k

$$\frac{\partial^k f^j}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ \ \partial x_{i_k}} \qquad i_1,\ ,i_k\in\{1,\ ,n\}$$

EKSTREMA FUNKCJI NA PRZESTRZENI BANACHA

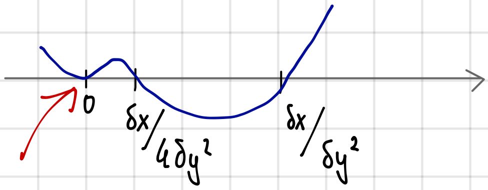
Jeśli nie będzie powiedziane inaczej, rozważać teraz będziemy funkcje $f\ X\supset U\longrightarrow \mathbb{R}$ na przestrzeni Banacha. Interesować nas będą ekstrema funk. Definicja ekstremum pozostaje niezmienna $x\in U$ jest maksimum lokalnym f jeśli dla pewnego $\varepsilon>0$ i dla wszystkich $y\in K(x,\varepsilon)$ $f(x)\geq f(y)$, x jest minimum lokalnym jeśli $f(x)\leq f(y)$. Punkt będący minimum lub maksimum lokalnym nazywa się ekstremum lokalnym

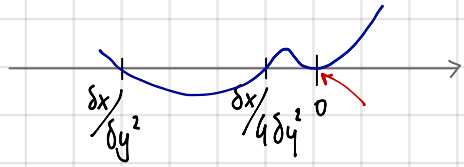
Interesować nas będą kryteria konieczne i kryteria wystarczające istnienia ekstremum (głównie) dla funkcji odpowiedniej klasy różniczkowalności. Żeby się przekonać o istnieniu sytuacji dość skomplikowanych obejrzyjmy kolejny eksponat w kolekcji funkcji dziwnych

$f(x,y) = (x-y^2)(x-4y^2)$ w punkcie $(0,0)$ funkcja przyjmuje wartość 0. Zobaczmy jak ta funkcja zachowuje się na prostych przechodzących przez 0

Niech $h=\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}$ $\quad f(th) = (t\delta x - t^2\delta y^2)(t\delta x - 4t^2\delta y^2) = t^2(\delta x - t\delta y^2)(\delta x - 4t\delta y^2)$

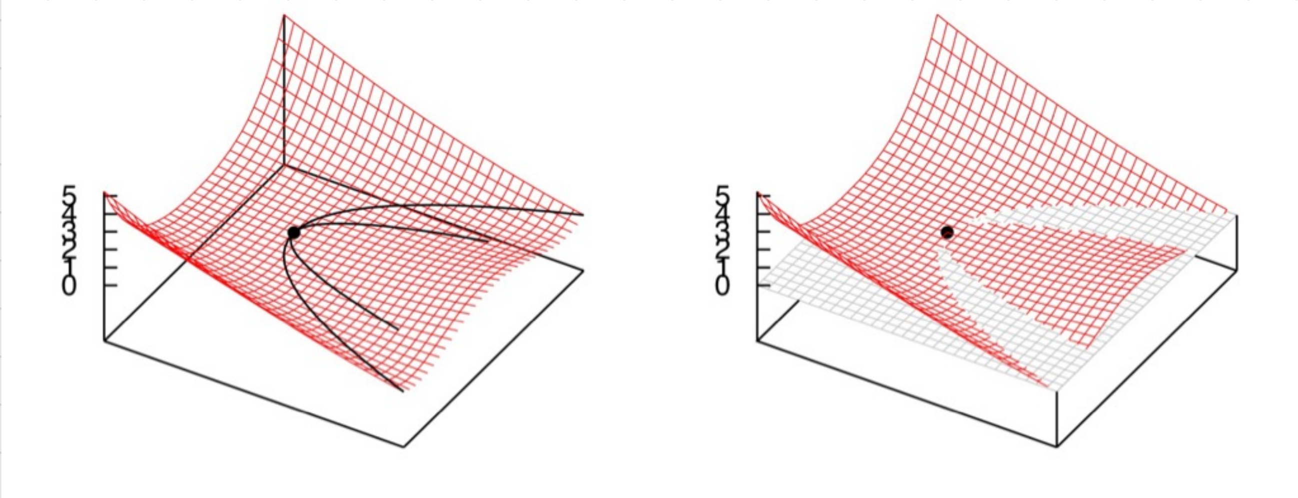
Zależność od t jest wielomianowa. Przy założeniu $\delta y \neq 0$ wielomian ma pierwiastki
$t_0=0,\ t_1 = \delta x/\delta y^2 \quad t_2 = \delta x/4\delta y^2$

dla $\delta x>0$ 

dla $\delta x<0$ 

gdy $\delta y=0$ $\ f(th) = t^2\delta x^2$ $\quad$ gdy $\delta x=0$ $\ f(th) = t^4\, 4\delta y^4$

We wszystkich przypadkach na prostej $t \longmapsto th$ jest minimum w $(0,0)$ jednak funkcja nie ma minimum w $(0,0)$. Popatrzmy na wykresy



Funkcja zeruje się na parabolach $x=y^2$, $x=4y^2$. Pomiędzy nimi jest ujemna, w pozostałych punktach dodatnia. W każdym otoczeniu punktu $(0,0)$ są dodatnie i ujemne wartości. Z drugiej strony, jeśli funkcja ma ekstremum w punkcie $x_0 \in U$ to ma je także funkcja $t \longmapsto f(x_0+th)$ w punkcie $t=0$ to pozwala sformułować

STWIERDZENIE Jeśli x_0 jest ekstremum f i jeśli f jest słabo różniczkowalna w x_0 to $\nabla f(x_0)=0$

Mamy więc warunek konieczny istnienia ekstremum dla funkcji przynajmniej słabo różniczkowalnych. Warunek dostateczny wymaga, tak jak w przypadku f jednej zmiennej, użycia wyższych pochodnych

TWIERDZENIE (Wzór Taylora) $f\ X\supset U\longrightarrow Y$ jest różniczkowalna $k-1$ razy na U, pochodna $f^{(k)}$ istnieje w $x_0\in U$. Wyrażenie

$$r_k(x_0,h)=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h-f''(x_0)(h,h)-\quad-\frac{1}{k!}f^{(k)}(h,\ ,h)$$ jest resztą rzędu k, tzn. spełnia

$$\lim_{h\to 0}\frac{r_k(x_0,h)}{\|h\|^k}=0$$

DOWÓD Dowód jest indukcyjny względem rzędu pochodnej. Dla $k=1$ $r_1(x_0,h)=f(x_0+h)-f(x_0)+-f'(x_0)h$ ma żądaną własność, co wynika z definicji różniczkowalności w punkcie x_0. Załóżmy teraz, że twierdzenie zachodzi dla $m-1$, dowodzimy że zachodzi dla $m\leq k$. Definiujemy $\varphi\ \Theta\longrightarrow Y$ gdzie $\Theta\subset X$ jest otoczeniem zera

$\Theta\ni h\longmapsto\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h-\quad-\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_0)(h,\ ,h)$ φ będziemy różniczkować względem h. Odwzorowanie wieloliniowe ciągłe są różniczkowalne w każdym punkcie

$Q\in B(\ell,X,Y)$ $\quad Q(h_1+\delta h_1,\ ,h_\ell+\delta h_\ell)=Q(h_1,\ ,h_\ell)+\underbrace{Q(\delta h_1,h_2,\ ,h_\ell)+\quad+Q(h_1,\ ,h_{\ell-1},\delta h_\ell)}_{\text{pochodne}}+r(h,\delta h)$

$$Q'(h)\delta h=\sum_{i=1}^{\ell}Q(h_1,\ ,\delta h_i,\ h_\ell)$$

Gdy Q jest symetryczne $Q'(h)\delta h=\sum_i Q(\delta h_i,h_1,\overset{\vee}{\ },h_\ell)$. Jeśli $(h_1,\ ,h_\ell)=(h,\ ,h)$, $(\delta h_1,\ ,\delta h_\ell)=(\delta h,\ ,\delta h)$ to $Q'(h)\delta h=\ell Q(\delta h,h,\ ,h)$

$$\varphi'(h)\delta h=f'(x+h)\delta h-f'(x_0)\delta h-f''(x_0)(\delta h,h)-\quad-\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\delta h,h,\ ,h)$$

$$\varphi'(h)=f'(x_0+h)-f'(x_0)-f''(x_0)(\ ,h)-\quad-\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\ ,h,\ h)$$

druga pochodna

$\varphi''(h)=f''(x_0+h)-f''(x_0)(\ ,\ )-\quad-\frac{1}{(m-2)!}f^{(m)}(\ ,\ ,h,\ ,h)$ z założenia twierdzenia f jest k razy różniczkowalne w x_0, $m\leq k$ zatem φ jest m razy różniczkowalne w 0, tj. φ' jest $m-1$ razy różniczkowalne w 0. Korzystamy z założenia indukcyjnego dla φ'

$$\frac{1}{\|h\|^{m-1}}\Big\|\varphi'(h)-\underset{0}{\underset{\|}{\varphi'(0)}}-\underset{0}{\underset{\|}{(\varphi')'(0)}}h-\quad-\frac{1}{(m-1)!}\underset{0}{\underset{\|}{\varphi'^{(m-1)}(0)}}(h,\ h)\Big\|\xrightarrow{h\to 0}0$$

$$\frac{1}{\|h\|^{m-1}}\|\varphi'(h)\|\xrightarrow{h\to 0}0$$

$$\frac{\|r_m(x_0,h)\|}{\|h\|^m}=\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|^m}=\frac{\|\varphi(h)-\overset{\|0}{\varphi(0)}\|}{\|h\|^m}\leq\sup_{t\in]0,1[}\frac{\|\varphi'(th)\|\,\cancel{\|h\|}}{\cancel{\|h\|^m}\ m-1}=\sup_{t\in]0,1[}\frac{\|\varphi'(t\ )\|}{\|h\|^{m-1}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{t^{p-1}}\sup_{t\in]0,1[}\frac{\|\varphi'(t)\|}{\|h\|^{m-1}}\leq\sup_{t\in]0,1[}\frac{\|\varphi'(t)\|}{\|th\|^{p-1}}\xrightarrow{\|h\|\to 0}0\qquad\blacksquare$$

Dla f wielu zmiennych nie mamy wzorów na resztę, ale mamy oszacowanie (Nierówność Taylora)

TWIERDZENIE Nierówność Taylora $f \; X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ różniczkowalne k-krotnie na $\mathcal{U}$ oraz na zbiorze $\{x_0 + th, \; t \in]0,1[\}$ istnieje pochodna rzędu $k+1$ wtedy reszta spełnia nierówność **29**

$$\|r_k(x_0,h)\| \leq \frac{1}{(k+1)!}\|h\|^{k+1} \sup_{t\in]0,1[} \|f^{(k+1)}(x_0+th)\|$$

NIE DOWODZIMY

TWIERDZENIE (Warunek dostateczny istnienia ekstremum) $f \; X \supset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest k-krotnie różniczkowalne w x_0 oraz $f^{(m)}(x_0)=0$ dla $m<k$, $f^{(k)}(x_0)\neq 0$ (1) Jeśli w x_0 f ma ekstremum to k jest parzyste oraz dla dowolnego h $f^{(k)}(x_0)(h, \; ,h) \leq 0$ dla maksimum i ≥ 0 dla minimum (2) Jeśli dla pewnego $\varepsilon>0$ $f^{(k)}(x_0)(h, \; ,h) < -\varepsilon$ (ewentualnie $f^{(k)}(x_0)(h, \; ,h) > \varepsilon$) dla dowolnego h $\|h\|=1$ to f ma w x_0 maksimum (minimum)

DOWÓD (1) Definiujemy $g_h \; I \ni t \longmapsto g_h(t) = f(x_0+th)$ g_h jest rzeczywistą funkcją różniczkowalną k-razy $g_h'(t) = f'(x_0+th)h$ $g_h''(t) = f''(x_0+th)(h,h)$ itd Skoro f ma w x_0 pochodne zerowe do rzędu $k-1$ to g_h też. Skoro $f^{(k)}(x_0)\neq 0$ to dla pewnego h $g_h^{(k)}(0)\neq 0$ jeśli f ma ekstremum w zerze to g_h też, wobec tego k musi być parzyste, pochodna rzędu k musi być stosownego znaku w/g odpowiedniego twierdzenia dla funkcji jednej zmiennej. Wątpliwości budzić może jedynie fakt, czy to, że $f^{(k)}(x_0)\neq 0$ oznacza że dla pewnego h $f^{(k)}(x_0)(h, \; ,h)\neq 0$ Jest to ogólna własność odwzorowań wieloliniowych. Odwzorowanie k-liniowe symetryczne jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na wektorach $(v,v, \; ,v)$ Przykładem jest formuła polaryzacyjna dla form dwuliniowych symetrycznych

$$Q(v,w) = \frac{1}{2}\left[Q(v+w,v+w) - Q(v,v) - Q(w,w)\right]$$

dla $k>2$ wzory są dłuższe, ale istnieją

(2) Ze wzoru Taylora mamy (dla max)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(h, \; ,h) + r_k(x_0,h)$$

dla $\|h\|=1$ mamy $f^{(k)}(x_0)(h, \; ,h) < -\varepsilon$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(h, \; ,h) + r_k(x_0,h) = \frac{1}{k!}\|h\|^k f^{(k)}(x_0)\left(\frac{h}{\|h\|}, \dots, \frac{h}{\|h\|}\right) + r_k(x_0,h) =$$

$$= \|h\|^k\left(\underbrace{\frac{1}{k!}f^{k}(x_0)\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}, \; , \frac{h}{\|h\|}\right)}_{<-\varepsilon/k!} + \frac{r_k(h,x_0)}{\|h\|^k}\right) < 0$$

Dla małych h może być dowolnie małe! W szczególności mniejsze niż $\frac{\varepsilon}{2k!}$ co do modułu

∎