Wykład 5 będzie miał charakter bardziej praktyczny niż teoretyczny. Zaczniemy od dwóch przykładów badania ekstremów funkcji wielu zmiennych.

PRZYKŁAD 1. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji F na D.

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad F(x,y) = x^4 + y^2 - 2x^2y^2 + 1 \qquad D = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

Funkcja F jest wielomianem od zmiennych x i y, jest więc różniczkowalna na całym $\mathbb{R}^2$. Ekstremów lokalnych szukać należy zatem badając punkty w których $F'(x,y) = 0$. Dodatkowo musimy zająć się też wartościami na brzegu D.

W dalszym ciągu używać będziemy oznaczeń

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$F_x = 4x^3 - 4xy^2 = 4x(x^2-y^2) = 4x(x-y)(x+y)$$

$F_x = 0$ gdy $x=0$ lub $\boxed{x=y}$ lub $x=-y$

na brzegu D

jedyna możliwość w Int D.

przynajmniej jedna współrzędna ujemna, zatem poza D (lub na brzegu)

$$F_y = 2y - 4x^2y = 2y(1-2x^2) = 2y(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)$$

$F_y = 0$ gdy $y=0$ lub $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ lub $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

na brzegu

O.K.

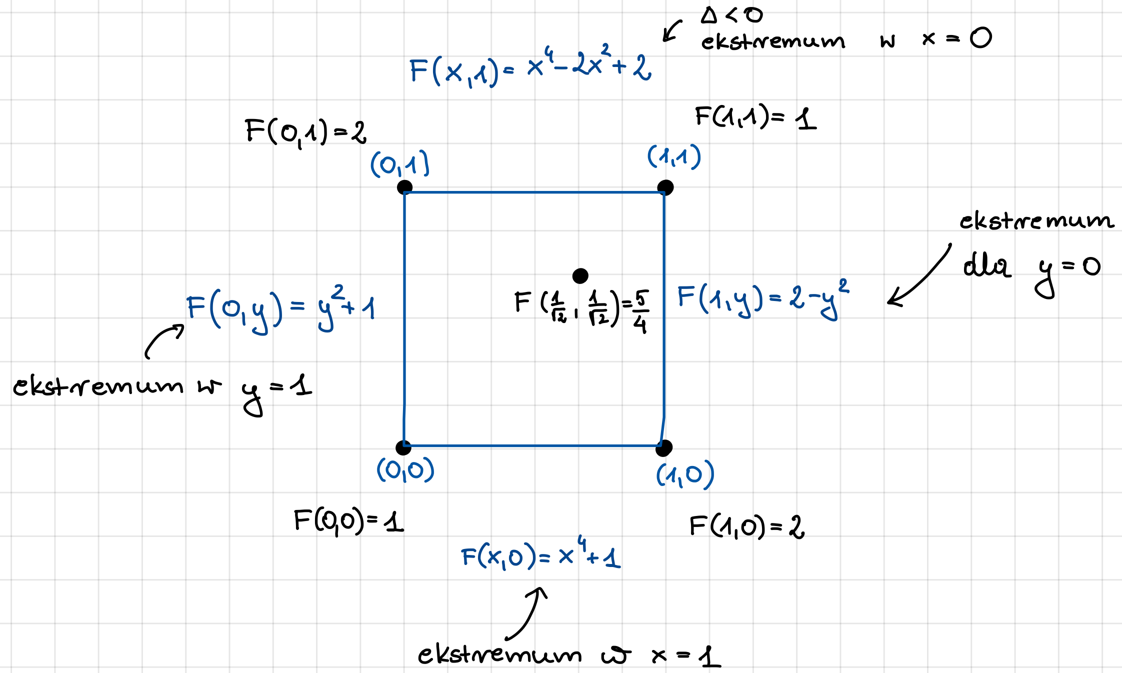
poza D

W Int D $F'(x) = 0$ jedynie gdy $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Jest to punkt krytyczny w którym może być ekstremum lokalne

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Badamy także wartości funkcji na brzegu:

29.2



F jest funkcją ciągłą, zbiór D jest zwarty, wiadomo więc, że maksimum i minimum na D jest osiągane. Punkty w których to jest możliwe, to punkty krytyczne w Int D i punkty krytyczne na brzegu, w tym wierzchołki kwadratu. Wniosek: F osiąga maksimum w $(0,1)$ i $(1,0)$; wartość ta jest 2. F osiąga minimum w $(0,0)$ i $(1,1)$; wartość ta jest 1.

Zadanie zostało więc rozwiązane. Nie wymagało badania drugiej pochodnej ze względu na twierdzenie o funkcjach ciągłych na zbiorze zwartym. Możemy jednak z ciekawości zbadać rodzaj punktu krytycznego $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. W tym celu liczymy drugą pochodną:

$$F_{xx} = 12x^2 - 4y^2 = \Big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 12\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = 6 - 2 = 4$$

$$F_{xy} = -8xy = \Big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} -8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -4$$

$$F_{yy} = 2 - 4x^2 = \Big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 2 - 4\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$F''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Druga pochodna jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym. Rodzaj punktu krytycznego określamy badając znak

$F''(p)(h,h)$

punkt krytyczny (u nas $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$)

dwa razy ten sam przyrost

$$h = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$$

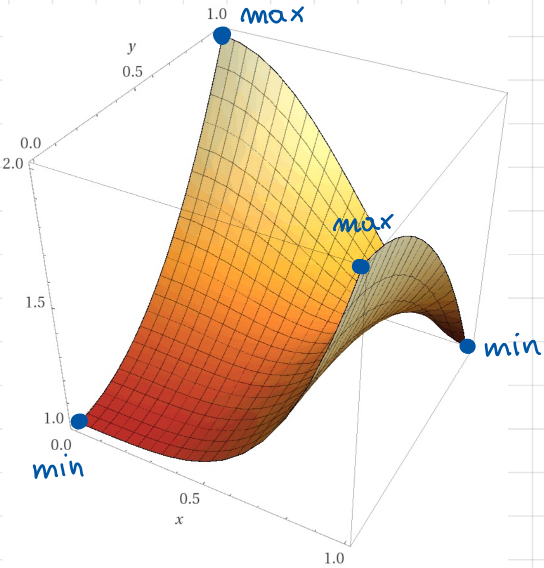
$$F''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(h,h) = \begin{bmatrix} \delta x & \delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \delta x & \delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\delta x - 4\delta y \\ -4\delta x \end{bmatrix} =$$

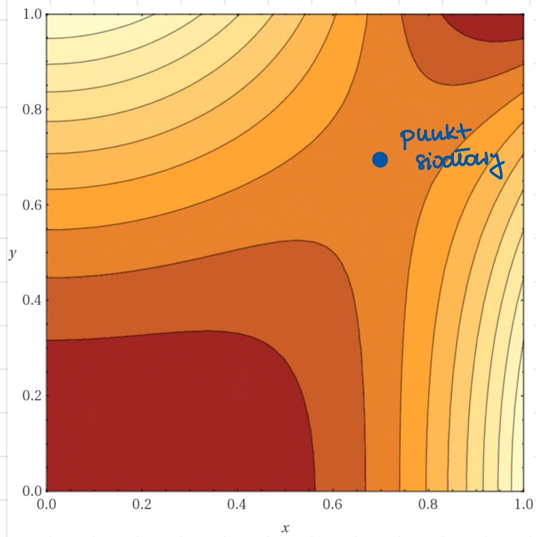
$$= 4\delta x^2 - 4\delta x\delta y - 4\delta x\delta y = 4\delta x^2 - 8\delta x\delta y$$

$$F''\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(h,h) = 4\delta_x^2 - 8\delta_x\delta_y = 4(\delta_x^2 - 2\delta_x\delta_y) = 4\left[(\delta_x - \delta_y)^2 - \delta_y^2\right]$$

Każdy ze składników $(\delta x - \delta y)^2$ i δy^2 jest nieujemny. Drugi wchodzi ze znakiem „−", zatem w zależności od $h = \begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix}$ druga pochodna na h może przyjmować i wartości dodatnie i ujemne. To wskazuje, że punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nie jest ani maksimum ani minimum. Jest to tak zwany punkt siodłowy.



POZIOMICE



PRZYKŁAD 2. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji

$$G(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$$

G jest różniczkowalna jako złożenie odwzorowań różniczkowalnych.
Liczymy $G'(x,y)$

$$G'(x,y) = [G_x(x,y) \quad G_y(x,y)]$$

$$G_x = (1+e^y)(-\sin x) = -(1+e^y)\sin x$$

$$G_y = e^y\cos x - e^y - ye^y = e^y(\cos x - 1 - y)$$

$G_x = 0$ gdy $\sin x = 0$, tzn $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$G_y = 0$ gdy $\cos x = 1 + y$

$x = 2k\pi$
$\cos x = 1 \Rightarrow y = 0$

$x = (2k+1)\pi$
$\cos x = -1 \Rightarrow y = -2$

Ostatecznie mamy dwie rodziny punktów krytycznych:

$(2k\pi, 0)\quad k\in\mathbb{Z}$; $((2k+1)\pi, -2)\quad k\in\mathbb{Z}$

$G(2k\pi, 0) = 2$

$$G((2k+1)\pi, -2) = \left(1+\frac{1}{e^2}\right)(-1) - 2\frac{1}{e^2} = -1-\frac{1}{e^2}-\frac{2}{e^2} = -1-3/e^2$$

Charakter tych punktów poznamy badając drugą pochodną

$G_{xx} = -(1+e^y)\cos x$

$G_{xy} = e^y \sin x$

$G_{yy} = e^y(\cos x - 1 - y) - e^y = e^y(\cos x - 2 - y)$

$(2k\pi, 0)$: $\cos x = 1$ $\sin x = 0$ $e^y = 1$

$G_{xx} = -2$ $\quad G_{xy} = 0$ $\quad G_{yy} = 1(1-2-0) = -1$ $\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$G''(2k\pi, 0)(h,h) = -2\delta x^2 - \delta y^2 < 0$ dla $h \neq 0$

Druga pochodna jest ujemnie określona – mamy minimum

$((2k+1)\pi, -2)$: $\cos x = -1$ $\sin x = 0$ $e^y = \frac{1}{e^2}$

$G_{xx} = \left(1+\frac{1}{e^2}\right)$

$G_{xy} = 0$

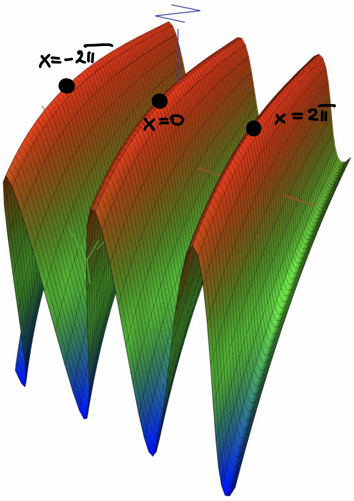
$G_{yy} = \frac{1}{e^2}(-1-2+2) = -\frac{1}{e^2}$

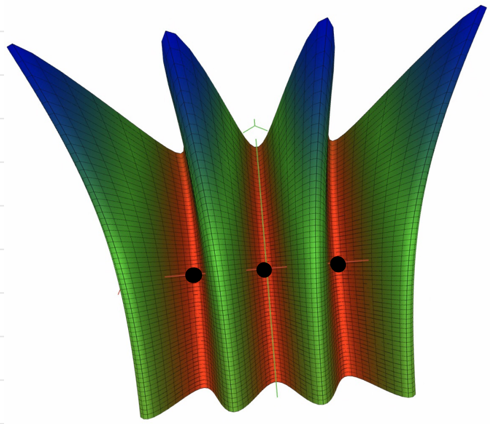
$$\begin{bmatrix} (1+1/e^2) & 0 \\ 0 & -1/e^2 \end{bmatrix}$$

Druga pochodna nie jest stałego znaku – punkt siodłowy

$x \in [-10, 10], \quad y \in [-0.5, 0.5]$

29.5

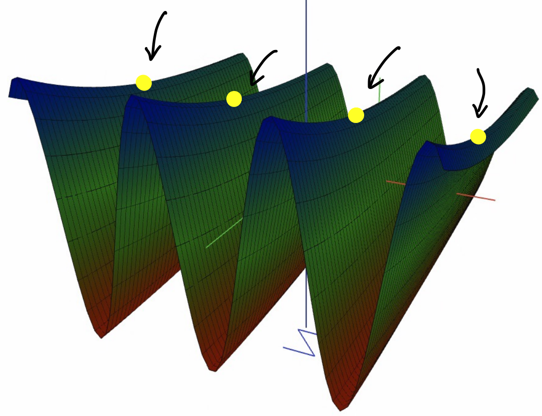




WYKRES WIDOK OD DOŁU

$x \in [-10, 10], \quad y \in [-2{,}5 ; -1.5]$

PUNKTY SIODŁOWE



TWIERDZENIE (o lokalnej odwracalności) X, Y przestrzenie Banacha
$f \; X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ odwzorowanie klasy C^1, $x_0 \in \mathcal{U}$, $y_0 = f(x_0) \in Y$
$f'(x_0) \; X \longrightarrow Y$ jest odwracalne wtedy istnieją otwarte otoczenie $\mathcal{O}$ punktu x_0, $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ punktu y_0 takie, że

$f|_{\mathcal{O}}$ jest bijekcją $\mathcal{O}$ na $\mathcal{V}$, $f^{-1} \; \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O}$ jest klasy C^1,

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad (f^{-1})'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1}$$

29.6

Następnym „dużym" tematem naszego wykładu będzie twierdzenie o lokalnej odwracalności. Dowód twierdzenia jest długi. Zaczniemy go na piątkowym wykładzie. Dziś zajmiemy się pożytkami tego twierdzenia.

Rozważmy $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ $\quad \mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ spełniające założenie twierdzenia. Oznacza to, że Φ i Φ^{-1} istnieją, są ciągłe i różniczkowalne. Mówimy wtedy, że Φ jest **dyfeomorfizmem**. Mówiąc mało precyzyjnie $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ „wyglądają tak samo" z punktu widzenia rachunku różniczkowego. Na przykład jeśli $f: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ ma ekstremum w $y_0 \in \mathcal{V}$ to $f \circ \Phi$ będzie miało ekstremum w $x_0 = \Phi^{-1}(y_0)$ i.t.d. Φ rozumiemy jako „zamianę zmiennych"

PRZYKŁAD: $\mathcal{O} = \left\{(x,y) : \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right\}$ $f \in C^1(\mathcal{O})$. Sprawdzić, że $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{y} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in C^1(\mathbb{R})$ takie, że $f(x,y) = y\, g(x^2+y^2)$.

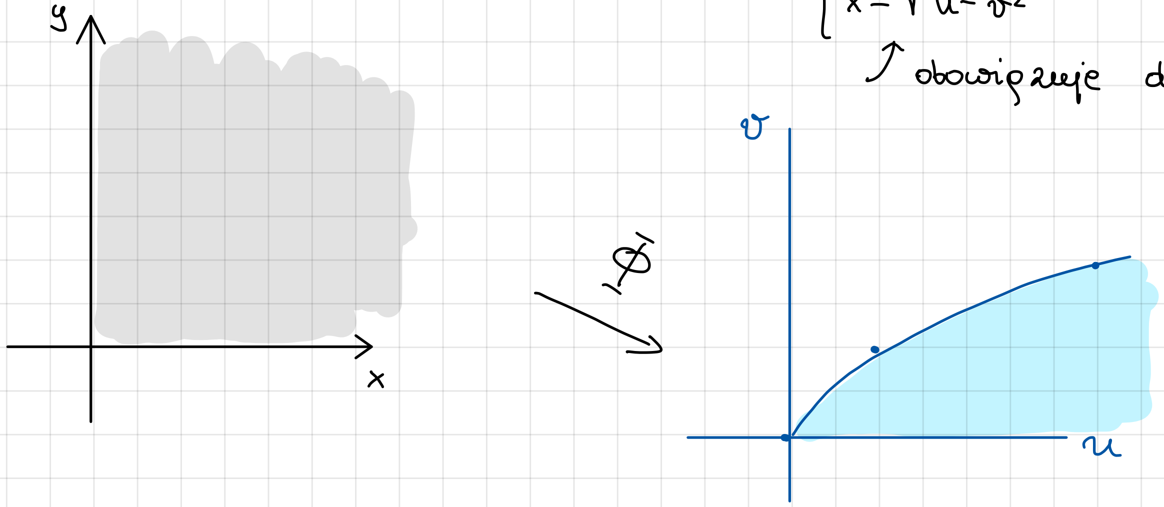
Rozważmy $\quad \Phi : \underset{\mathcal{O}}{\underset{\cap}{(x,y)}} \longmapsto (u,v) \qquad u(x,y) = x^2+y^2 \quad v(x,y) = y$

$$\Phi'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \Phi'(x,y) = 2x$$

$\Phi'(x,y)$ jest macierzą odwracalną w każdym punkcie $\mathcal{O}$. Dodatkowo Φ możemy odwrócić algebraicznie:

$$\begin{cases} y = v & x^2 = u - y^2 \\ x = \sqrt{u - v^2} \end{cases}$$

↑ obowiązuje dla $u > v^2$



$u = x^2 + y^2$ $\quad F = f \circ \Phi^{-1}$ $\quad u_x = 2x \quad u_y = 2y$

$v = y$ $\quad\quad v_x = 0 \quad v_y = 1$

29.7

$$F\big(u(x,y), v(x,y)\big) = f(x,y)$$

$$F_u \cdot u_x + F_v v_x = f_x$$
$$F_u u_y + F_v v_y = f_y$$

$$x f_y - y f_x = \frac{x}{y} f \quad *$$

$$x\left[F_u \cdot 2y + F_v \cdot 1\right] - y\left[F_u \cdot 2x\right] = \frac{x}{y} F$$

$$\cancel{2xy F_u} + x F_v - \cancel{2xy F_u} = \frac{x}{y} F$$

$$\cancel{x} F_v = \frac{\cancel{x}}{y} F$$

$$v F_v = F \implies F(u,v) = v\, g(u)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x,y) = y\, g(x^2 + y^2)}$$

INNY SPOSÓB ZAPISU:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = 2x \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = 2y \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = 2xy\frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial v} - 2xy\frac{\partial}{\partial u} = x\frac{\partial}{\partial v}$$

$$* \quad x\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{x}{y} F \longrightarrow \text{dalej tak samo.}$$

Posługując się nowym układem współrzędnych w rozwiązaliśmy równanie różniczkowe cząstkowe.

Linie stałych (u, v)