

SEMESTR II WYKŁAD 5 TWIERDZENIE O LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI

31III, 4IV

30

Twierdzenie o lokalnej odwracalności jest banachowskim odpowiednikiem twierdzenia o istnieniu i różniczkowalności funkcji odwrotnej, którego często był wzór $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$

Od strony praktycznej twierdzenie to jest ważne przy rozwiązaniu nieliniowych układów współrzędnych na przestrzeni skończonej wymiarowej

TWIERDZENIE (o LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI) X, Y przestrzenie Banacha. $f: X \supset U \rightarrow Y$ odwzorowanie klasy C^1 , $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0) \in Y$. $f'(x_0): X \rightarrow Y$ jest odwracalne wtedy istnieje otwarte otoczenie $\mathcal{O}$ punktu x_0 , $\mathcal{O} \subset U$ i V punktu y_0 takie, że

$$f|_{\mathcal{O}} \text{ jest bijekcją } \mathcal{O} \text{ na } V, f^{-1}: V \rightarrow \mathcal{O} \text{ jest klasy } C^1, \\ \forall y \in V \quad (f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

DOWÓD Dowód jest dość długi, podzielimy go więc na pewne etapy
(1) $f'(x)$ jest odwracalne nie tylko w x_0 ale także na pewnym otoczeniu x_0

W teorii przestrzeni Banacha funkcjomurowe twierdzenie o wykresie domkniętym które mówi że $T: V \rightarrow W$ jest liniowe i ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy $G_T = \{(v, T(v)) \mid v \in V\} \subset V \times W$ jest podprzestrzenią domkniętą. Zbiór G_T nazywa się wykresem T . Dowód $\Rightarrow$ jest łatwy, $\Leftarrow$ trudny. Jeśli T jest odwracalne to G_T i $G_{T^{-1}}$ różnią się o transpozycję w iloczynie kartezjańskim, więc jeśli T jest ciągłe to T^{-1} też

Z tego twierdzenia wynika więc, że $[f'(x_0)]^{-1}$ jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym. Wykażemy teraz, że zbiór odwzorowań odwracalnych $\mathcal{B}(X, Y)$ jest zbiorem otwartym

Wzemy $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T^{-1} istnieje 2 rozważań $u + w$ o wykresie domkniętym
 wiemy, że T^{-1} jest ciągły zatem $\|T^{-1}\|$ jest dobrze określona. Wzemy
 dowolne $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ takie że $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ wtedy

31

$$\|T^{-1}S\| \leq \|S\| \|T^{-1}\| < 1$$

W takim przypadku istnieje $(\mathbb{1} + T^{-1}S)^{-1}$ Istotnie, niech $P = -T^{-1}S$
 Pokażemy że istnieje $(\mathbb{1} - P)^{-1}$ zaproponujemy ten operator w postaci
 szeregu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} + P + P^2 + \dots + P^n)$ Szeregi ten jest zbieżny gdyż $\|P\| < 1$

$$\left\| \sum_{m=0}^n P^m \right\| \leq \sum_{m=0}^n \|P\|^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|P\|^m = \frac{\|P\|^0}{1 - \|P\|} \rightarrow 0$$

$$\text{Mamy } (\mathbb{1} - P) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} + P + \dots + P^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\mathbb{1} - P)(\mathbb{1} + P + \dots + P^n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} - P + P - P^2 + P^2 - P^3 + \dots - P^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} - P^{n+1}) = \mathbb{1} \quad (\text{podobnie w drugiej kolejności})$$

$$\text{Wiemy więc, że istnieje } (\mathbb{1} + T^{-1}S)^{-1} \quad T \cdot (\mathbb{1} + T^{-1}S) = (T + S)$$

$$(\mathbb{1} + T^{-1}S)^{-1} = (\mathbb{1} + T^{-1}S)^{-1} T^{-1} = (T + S)^{-1} \quad \text{zatem istnieje odwrotne do}$$

$T + S$ dla dowolnych S $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ Zbiór odwzorowań odwracalnych
 zawiera więc kule o środku w T , promieniu $1/\|T^{-1}\|$

Wracając do problemu pochodnych, żeby wykazać, że $f'(x)$ jest odwracalna
 nie tylko w x_0 ale i w pobliżu x_0 musimy wykazać że $f'(x)$ jest blisko
 $f'(x_0)$ w normie operatorowej 2 założenie jednak wiemy że $f'(x)$ zależy
 od x w sposób ciągły zatem $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takie, że jeśli $\|x - x_0\| < \delta$ to
 $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon$ Wystarczy więc wziąć $\varepsilon = \frac{1}{2\|f'(x_0)\|}$ aby uzyskać
 wniosek, że istnieje δ takie, że dla $x \in K(x_0, \delta)$ $f'(x) \in K(f'(x_0), \frac{1}{2\|f'(x_0)\|})$ w której są jedynie odwracalne
 me odwracalne. Jako δ weźmiemy więc $K(x_0, \delta)$

(2) f jest różnowartościowe na $\mathcal{O}$

Dla $y \in Y$ zdefiniujemy pomocnicze odwzorowanie $\phi_y: \mathcal{U} \rightarrow X$

$$\phi_y(x) = x + [f'(x_0)]^{-1}(y - f(x)) \leftarrow \text{Dlaczego taka funkcja?} \rightarrow \text{mające służyć}$$

mamy $y = f(x) \Leftrightarrow \phi_y(x) = x$ Odwzorowanie ϕ_y jest różnowartościowe

$$\phi'_y(x) = \mathbb{I}_X - [f'(x_0)]^{-1} f'(x) = [f'(x_0)]^{-1} (f'(x_0) - f'(x))$$

dla $x \in \mathcal{O}$ to ma normę mniejszą niż $\frac{1}{2} \|f'(x_0)^{-1}\|$

$$\text{dla } x \in \mathcal{O} \quad \|\phi'_y(x)\| < \frac{1}{2}$$

Weźmy teraz $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ wtedy

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x_2) - \phi_y(x_1)\| &= \|\phi(x_2 + \overbrace{(x_1 - x_2)}^h) - \phi(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \sup_{t \in]0,1[} \|\phi'_y(x_2 + t(x_1 - x_2))\| < \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Odwzorowanie $\phi_y|_{\mathcal{O}}$ jest odwzorowaniem, które nazywamy **zblizajacym**

Dla odwzorowań zblizajacych mamy twierdzenie, które tu po prostu nam za lemat

TWIERDZENIE Niech X zupełny przestrzenią metryczną $\varphi: X \rightarrow X$ zblizajace
tzn istnieje $0 < \lambda < 1$ takie, że $\forall x_1, x_2 \in X$ $d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$
Wtedy φ ma dokładnie jeden punkt stały, tzn $\exists! x_0$ $\varphi(x_0) = x_0$

DOWÓD

$$x_1 \in X \text{ dowolny } x_2 = \varphi(x_1) \quad x_n = \varphi(x_{n-1})$$

$$d(x_n, x_{n+k}) = d(\varphi^{n-1}(x_1), \varphi^{n-1}(x_{k+1})) \leq \lambda^{n-1} d(x_1, x_{k+1}) \leq$$

$$\leq \lambda^{n-1} (d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_k, x_{k+1})) \leq \lambda^{n-1} (\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^k) d(x_1, x_2) =$$

$$= \lambda^{n-1} \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda} d(x_1, x_2) \longrightarrow 0$$

$$\Phi_y(x) = x + [f'(x_0)]^{-1}(y - f(x))$$

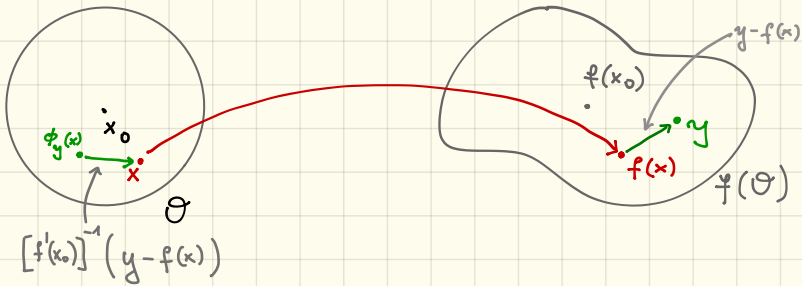
$$\Phi_y(x) - x = [f'(x_0)]^{-1}(y - f(x))$$

$$f'(x_0)[\Phi_y(x) - x] = y - f(x)$$

Wykazanie bijectywności może polegać np. na pokazaniu, że istnieje odwrócone odwzorowanie odwrotne

Założmy że mamy parę

$(x, f(x))$ i dla ustalonego $y \in f(\Theta)$ takiego, że y jest w pobliżu $f(x)$ chcemy znaleźć $p \in \Theta$ taki, że $f(p) = y$



Skoro różnica $f(x_0+h) - f(x_0)$ jest przybliżana przez $f'(x_0)h$ i $f'(x_0)$ jest odwracalne to h jest przybliżane przez

$$[f'(x_0)]^{-1}(f(x_0+h) - f(x_0))$$

Przyjmujemy to przybliżenie szukając p . Oczywiście dowiadujemy się że $\Phi_y(x)$ nie jest dokładnym p , ale dzięki temu że Φ_y jest zbliżeniem za każdą iterację Φ_y jest coraz bliżej celu

(x_n) jest ciągłem Cauchy'ego w p zupełnej. Ma granicę, oznaczmy ją x_0 . Dla x_0 mamy, z ciągłości φ

53

$$\varphi(x_0) = \varphi(\lim x_n) = \lim \varphi(x_n) = \lim x_{n+1} = x_0 \quad \text{tj.} \quad \varphi(x_0) = x_0.$$

Zauważmy że $\exists y \quad \varphi(y) = y$ wtedy

$$d(x_0, y) \leq \lambda d(\varphi(x_0), \varphi(y))$$

$$\overset{''}{d(\varphi(x_0), \varphi(y))} \longrightarrow d(x_0, y) = 0 \rightarrow y = x_0.$$

■

Wróćmy do Φ_y jest to odwzorowanie zbijające, więc dla tych y dla których $\Phi_y|_{\mathcal{O}}$ ma wartość w $\mathcal{O}$ odwzorowanie to ma dokładnie jeden punkt stały. Dla jakich y tak jest? Patrząc na wzór $\Phi_y(x) = x + (f'(x_0))^{-1}(y - f(x))$ stwierdzamy, że dla takich y dla których $y - f(x)$ jest nieduże, czyli dla y w pobliżu $f(x)$ (dla $x \in \mathcal{O}$), a więc pewnosup dla $y \in f(\mathcal{O})$. Punkt stały to punkt x $y = f(x)$, jednoznacznie wyznaczony dla y . Wniosekujemy, że $f|_{\mathcal{O}}$ jest różnowartościowe.

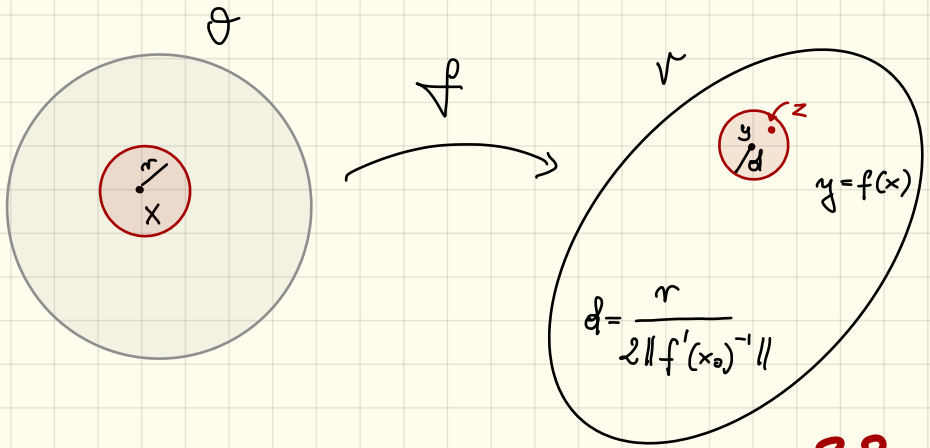
(3) Weźmy $V = f(\mathcal{O})$ zdefiniuj V z punktu (2) $f: \mathcal{O} \rightarrow V$ jest bijekcją. Pokazać należy, że V jest otoczeniem y_0 , czyli w szczególności, że V jest zbiorem otwartym w Y .

Weźmy $y \in V$ i odpowiedni, jedyny $x \in \mathcal{O}$ taki, że $f(x) = y$. Wiemy, że $\mathcal{O}$ jest otwarty więc istnieje r $K(x, r) \subset \mathcal{O}$. Weźmy promień $\delta = \frac{r}{2} \|f'(x_0)^{-1}\|$. Pokażemy, że $\forall z \in K(y, \delta) \quad z \in V$.

Weźmy więc dowolne $z \in K(y, \delta)$ i rozważmy $\Phi_z(x)$ dla $x \in K(x, r)$

$$\|\Phi_z(z) - x\| \leq \|\Phi_z(z) - \Phi_z(x)\| + \|\Phi_z(x) - x\| \leq \frac{1}{2} \|z - x\| + \|f'(x_0)^{-1}(z - f(x))\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} r + \underbrace{\|f'(x_0)^{-1}\|}_{\leq \frac{1}{\delta}} \|z - y\| \leq \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r \quad \Phi_z(z) \in K(x, r) \subset \mathcal{O}$$



33a

$\Phi_5|_{K(x,r)}$ ma wartość w $K(x,r) \subset \mathcal{O}$ zatem Φ_5 ma punkt stały w $\mathcal{O}$, **34**

a nawet więcej w $K(x,r)$ Nazwijmy ten punkt stały ξ_0 . Wiadomo zatem, że $\Phi_5(\xi_0) = \xi_0$ czyli $f(\xi_0) = \xi$ Wniosek $\xi \in f(\mathcal{O}) = V$ z było dowolnie z $K(y,d)$, zatem $K(y,d) \subset V$. V otwarty

(4) Wiemy już że istnieje $\mathcal{O}$, V otoczenie x_0, y_0 takie, że $f: \mathcal{O} \rightarrow V$ jest bijekcją, tzn f^{-1} istnieje **Dowodzimy teraz różniczkowalność f^{-1}**

Dla ułatwienia notacji oznaczamy $f^{-1} = g$

Weźmy $y \in V$, $k \in Y$ takie, żeby $y+k \in V$, czyli $\|k\|$ małe Spodziewamy się, zgodnie z teorią, że $g'(y) = (f'(x))^{-1}$ dla $x = f(x) = y$

$$r_g(y, k) = g(y+k) - g(y) - (f'(x))^{-1}k = \cancel{x+h} - \cancel{x} - (f'(x))^{-1}k -$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} x+h & \xleftarrow{g} & y+k \\ \uparrow & & \nearrow \\ x & \xrightarrow{f} & y \end{array} \quad = h - (f'(x))^{-1}k = [f'(x)]^{-1} (f'(x)h - k) - \\ & = [f'(x)]^{-1} (f'(x)h - [f(x+h) - f(x)]) = -[f'(x)]^{-1} (f(x+h) - f(x) - f'(x)h) - \\ & = -[f'(x)]^{-1} r_f(x, h) \end{aligned}$$

$$r_g(h, k) = -[f'(x)]^{-1} r_f(x, h)$$

$k \rightarrow 0$
początek $h \rightarrow 0$

$$\frac{\|r_g(h, k)\|}{\|k\|} = \frac{1}{\|k\|} \| [f'(x)]^{-1} \| \| r_f(x, h) \| \leq \| [f'(x)]^{-1} \| \frac{\|h\|}{\|k\|} \frac{\|r_f(x, h)\|}{\|h\|}$$

jak nie ma h do k ograniczone $h \rightarrow 0$

$$\| \Phi_y(x+h) - \Phi_y(x) \| \leq \frac{1}{2} \| h \|$$

$$\begin{aligned} \Phi_y(x+h) - \Phi_y(x) &= x+h + \underbrace{[f'(x)]^{-1}}_A (y - f(x+h)) - (x + [f'(x)]^{-1} (y - f(x))) = \cancel{x} + h + \cancel{Ay} - A(f(x+h)) \\ &= \cancel{x} - \cancel{Ay} + Af(x) = h - A(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_k) = h - [f'(x)]^{-1}k \end{aligned}$$

$$\|h - \underbrace{[f'(x)]^{-1}}_A k\| \leq \frac{1}{2} \|h\|$$

$$h = h + Ak - Ak \quad \|h\| \leq \|h - Ak\| + \|Ak\| \leq \frac{1}{2} \|h\| + \|Ak\|$$

$$\frac{1}{2} \|h\| \leq \|Ak\| \leq \|A\| \|k\|$$

$$\|h\| \leq 2\|A\| \|k\| \quad \text{zatem } k \rightarrow 0 \text{ pociąga } h \rightarrow 0$$

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} \leq 2\|A\| + \text{zn. ograniczone}$$

Pokazaliśmy więc, że reszta zachowuje się właściwie

(5) Udowodniliśmy różniczkowalność f^{-1} . Pozostaje wykazać "w sposób ciągły". Ponieważ mamy wzór $(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$, wiemy, że f jest różniczkowalna w sposób ciągły wystarczy pokazać, że ciągłe jest odwzorowanie

$$B(x, y) \ni T \mapsto T^{-1} \in B(y, x)$$

W celach ogólnorozwójowych pokażemy więcej - jest to odwzorowanie różniczkowalne.

$$D'(T)H = -T^{-1} \cdot H \cdot T^{-1} \quad (H \in B(x, y) - \text{przestrzeń})$$

$$D(T+H) - D(T) = (T+H)^{-1} - T^{-1} = (\mathbb{1} + T^{-1}H)^{-1} T^{-1} - T^{-1} =$$

$$= [(\mathbb{1} + T^{-1}H)^{-1} - \mathbb{1}] T^{-1} = [\mathbb{1} - T^{-1}H + (T^{-1}H)^2 - \dots - \mathbb{1}] T^{-1} =$$

$$\text{Jeśli } \|T^{-1}H\| < 1 \quad \text{ztn } \|H\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

$$= \underbrace{-T^{-1}HT^{-1}}_{\text{pochodna}} + \underbrace{(T^{-1}H)^2 T^{-1}}_{\text{reszta}} + \dots$$

$$\| (T^{-1}H)^2 T^{-1} + (T^{-1}H)^3 T^{-1} + \dots \| \leq \|T^{-1}\| \|T^{-1}H\|^2 (1 + \|T^{-1}H\| + \dots) \leq$$

$$\leq \|T^{-1}\| \underbrace{\|H\|^2}_{\text{czynniki}} \frac{1}{1 - \|T^{-1}H\|}$$

→ ten czynnik gwarantuje zachowanie reszty