Zad. 1. Zbadać zbieżność (punktową/jednostajną/niemal jednostajną) ciągu/szeregu funcyjnego, znaleźć punkty ciągłości, zbaać zbieżność na przedziałach ciągłości:
a. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}, x \in \mathbb{R}$
b. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-(x-n)^2}, x \in \mathbb{R}$
c. $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2}, x \in \mathbb{R}$
d. $\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+(n+1)x}{nx+1}, x \in [0, \infty[$
e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+nx^2}}{x+n^2}, x \in [0, \infty[$
f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{1+n^5x^2}, x \in [0, \infty[$

Zad 2. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji:
a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\sin(\sqrt{x^2+y^2})$
b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\sqrt{x^2+y^2})$
c. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \mathrm{e}^{|x|+|y|-\sqrt{x^2+y^2}}$
d. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x = y = 0 \end{cases}$
e. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x = y = 0 \end{cases}$
f. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} x \arctan \frac{y}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$
g. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} x \arctan \frac{y^2}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Zad 3. Policzyć F'.
a. $F : \mathcal{C}([-1,1]) \to \mathcal{C}([-1,1]),\ F(f) : x \mapsto \int_0^x f(y)\mathrm{d}y,\ ||f|| = \sup|f(x)|$
b. $F : \mathcal{C}([-1,1]) \to \mathbb{R},\ F(f) = \int_{-1}^{1} \big((f'(y))^2 + (f(y))^2\big)\mathrm{d}y$
c. $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ F(A) = \mathrm{tr}(A^k),\ k \in \mathbb{N},\ ||A|| = \max|A_{ij}|$

Zad.4.* Niech: $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ F(A) = \det A$. Pokazać, że jeśli A jest macierzą odwracalną, to $F'(A)B = (\det A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}B)$.