

Zad. 1. Znaleźć wzór na laplasjan $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ we współrzędnych:

- a. $x = \sinh u \sin v \cos \phi$, $y = \sinh u \sin v \sin \phi$, $z = \cosh u \cos v$
- b. $x = \cosh u \sin v \cos \phi$, $y = \cosh u \sin v \sin \phi$, $z = \sinh u \cos v$

Zad. 2. Znaleźć i zbadać (za pomocą drugiej pochodnej) punkty krytyczne funkcji $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Określić, czy minima i maksima są globalne czy lokalne.

- a. $f(x, y, z) = (1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{x}{y})(1 + \frac{y}{z})(1 + z)$, $U = \mathbb{R}_+^3$
- b. $f(x, y, z) = 7xy + 2yz + 2zx - \log(x^2 + y^2 + z^2)$, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$
- c. $f(x, y) = \frac{1}{3}(x + y)^3 - (x + \sqrt{x^2 + 1})y$, $U = \mathbb{R}^2$
- d. $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \log(1 + (xy - 1)^2)$, $U = \mathbb{R}^2$
- e. $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(x - y)^2$, $U = \mathbb{R}^2$
- f. $f(x, y) = \frac{(x+a)y}{1+x^2+y^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^2$
- g. $f(x, y, z) = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$, $U = \mathbb{R}_+^3$

Zad. 3. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji f na zbiorze D .

- a. $f(x, y) = x^2 + y^2 - \log((x + y)^2)$, $D = [\frac{1}{2}, 2] \times [0, 3]$
- b. $f(x, y) = xe^y + \frac{xe^{-y}}{(1+x^2)^2}$, $D = \mathbb{R}^2$
- c. $f(x, y) = \cos x + \cos y + \sin(x + y)$, $D = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]^2$

Zad. 4. Sprawdzić lokalną odwracalność odwzorowania F w otoczeniu podanego punktu.

- a. $F(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$
- b. $F(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2}})$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- c. $F(x, y, z) = (e^{x-y} + (y-z)^2, e^{y-z} + (z-x)^2, e^{z-x} + (x-y)^2)$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$
- d. $F(x, y, z) = (x - \frac{1}{2}y, \frac{2y-x}{1+z}, xy - z)$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$