Zadania domowe z Analizy IIR — całki

Zadanie 1. Zapisać całkę $I = \int_\triangle f(x,y,z)dxdydz$, gdzie $\triangle \subset \mathbb{R}^3$ jest czworościanem o wierzchołkach $(0,1,2)$, $(1,0,-1)$, $(1,3,5)$, $(1,0,2)$, w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek):

(a) $\int dx \int dy \int f\, dz$;
(b) $\int dz \int dx \int f\, dy$.

Zadanie 2. Obliczyć pole obszaru $K \subset \mathbb{R}^2$:

(a) ograniczonego cykloidą $(x,y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, i prostą $y = 0$;
(b) ograniczonego krzywą $(x,y) = (\sin 2\phi, \sin 3\phi)$, $0 \le \phi \le \pi$;
(c) $K = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \le a(x^3 - 3xy^2)\}$;
(d) $K = \{(x,y) : ax^2 - bxy + cy^4 \le 0;\ x, y \ge 0\}$;
(e) $K = \{(x,y) : ax^3 - bx^2y + cy^4 \le 0;\ x, y \ge 0\}$, $(a,b,c > 0)$.

Zadanie 3. Przestawić kolejność całkowania w całce:

(a) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f\, dy$;
(b) $\int_{-2}^6 dx \int_{-\sqrt{12+4x-x^2}}^{\sqrt{12+4x-x^2}} f\, dy$;
(c) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f\, dy$;
(d) $\int_0^\pi dx \int_{-\sin x}^{\sin x} f\, dy$;
(e) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\, dx$

Zadanie 4. Przedstawić $I := \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{\frac{x+y}{2}}^{2y-x} f\, dz$ w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek) o zadanej kolejności całkowania:

(a) $I = \int dz \int dy \int f\, dx$;
(b) $I = \int dx \int dz \int f\, dy$;
(c) $I = \int dy \int dz \int f\, dx$;
(d) $I = \int dz \int dx \int f\, dy$.

Zadanie 5. Obliczyć całki i skomentować otrzymane wyniki:

(a) $\int_1^\infty dx \int_0^1 dy \frac{y-x}{(x+y)^3}$,
(b) $\int_0^1 dy \int_1^\infty dx \frac{y-x}{(x+y)^3}$.

Zadanie 6. Odwracając kolejność całkowania wykazać, że

$$\int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1 = \int_a^b f(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}dx.$$

Zadanie 7. Niech I oznacza całkę podwójną $I = \int_K f(x,y)dxdy$; sprawdzić, że:

(a) $K = \{x^2 + y^2 \le x\}$, $f = x^{-1}|y| \Rightarrow I = \frac{1}{2}$;
(b) $K = \{x^2 + y^2 \le a^2\}$, $f = x^2\sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow I = \frac{32a^5}{45}$;
(c) $K = \{(x^2+y^2)^2 \le 2a^2(x^2 - y^2, x \ge 0\}$, $f = 1 \Rightarrow I = a^2$;
(d) $K = \{x, y \ge 0, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \le 1\}$, $f = xy \Rightarrow I = \frac{a^2b^2}{280}$;
(e) $K = \{y \ge 0, 9x \le y^2, x^2 + y \le 4\}$, $f = xy \Rightarrow I = -\frac{15}{4}$;
(f) $K = \{xy \ge 1, y^2 \ge x, y \le 2\}$, $f = x^2y \Rightarrow I = \frac{251}{24}$;
(g) $K = \{x^2 = y^2 \le 2x\}$, $f = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Rightarrow I = \frac{8}{9}(3\pi - 4)$;
(h) $K = \{x^2 + 2y^3 \le 4xy, y \ge 0\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{64}{15}$;
(i) $K = \{(x^2 - ax + y^2)^2 \le a^2(x^2 + y^2)\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{2}\pi a^2$;
(j) $K = \{x^2 + y^2 \le a^2\}$, $f = e^{x^2+y^2} \Rightarrow I = (e^{a^2} - 1)\pi$;
(k) $K = \{y \le 1, x^2(2-y) \le y(1-y)^2\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{4-\pi}{2}$;ś
(l) $K = \{0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le 2\}$, $f = x^2y\cos(xy^2) \Rightarrow I = -\frac{\pi}{16}$;
(m) $K = \{|x - y| \le 1, y \ge 0\}$, $f = xe^{-y^2} \Rightarrow I = 1$.

Zadanie 8. Wyliczyć środek ciężkości jednorodnego obszaru płaskiego $K := \{(x,y) : x > 0, xy \geq 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 2\}$ (przy $a, b > 0$, $ab > 1$ danych); sprawdzić, że leży on na prostej o równaniu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Zadanie 9. Niech I oznacza całkę potrójną $I = \int_K f(x,y,z)dxdydz$; sprawdzić, że:
(a) $K = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$, $f(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-3} \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\log 2 - \frac{5}{8})$;
(b) $K = \{x^2+y^2+z^2 \leq 2, x^2+y^2 \leq z\}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{60}(96\sqrt{2}-8)$;
(c) $K = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, $f(x,y,z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}abc$;
(d) $K = \{x^2+y^2 \leq z \leq 2(x^2+y^2), x^2 \leq y \leq x\}$, $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{35}$;
(e) $K = \{x^2+y^2+z^2 \leq x\}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{10}$.

Zadanie 10. Obliczyć średnią wartość $M(f,K) = \int_K f(x)dx \; // \int_K dx$ funkcji f na zbiorze K:
(a) $K = \{x \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, $f(x) = x_1^2 x_2$;
(b) $K = \{x \in R^2 : (x_1-a)^2 + x_2^2 \leq r^2\}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$;
(c) $K = \{x \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq x_1 + x_2 + x_3\}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;
(d) $K = \{x \in R^3 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4,\ x_3 \geq 0\}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 11. Znaleźć środek ciężkości jednorodnej półkuli $\Omega := \{x+2+y^2+(z-1)^2 \leq 1, z \leq 1\}$.

Zadanie 12. Obliczyć objętość brył:
(a) $B_1 := \{x^2+y^2+z^2 \leq 4z, x^2+y^2 \leq 3z\}$;
(b) $B_2 := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$;
(c) $B_3 := \{x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \leq 3z\}$;
(d) $B_4 := K_1 \cup K_2$
(e) $B_5 := K_1 \cap K_2$, gdzie $K_1 := \{x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$, $K_2 := \{x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$.

Zadanie 13. Znaleźć środek ciężkości jednorodnej bryły $\Omega := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$.

Zadanie 14. Znaleźć moment bezwładności względem osi $0z$ stożka $C := \{x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$ o gęstości $\rho(x,y,z) = z^2$;

Zadanie 15. Oznaczmy $\Omega := \{(x,y) : x > 0, y > 0, x^2+y^2 < 1\}$ oraz $I_p := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \varphi \, d\varphi$ dla $p > -1$. Licząc całkę $\int_K \frac{y^p \, dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ dwoma sposobami: jako całkę iterowaną i przez parametryzację $x = \sin\theta \cos\varphi$, $y = \sin\theta \sin\varphi$,wykazać tożsamość $I_p I_{p+1} = \frac{\pi}{2(p+1)}$. Korzystając z tej tożsamości wyprowadzić następujące oszacowanie: $\sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} < I_p < \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$.

Zadanie 16. Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \leq 0\}$ o gęstści $\rho = 1$, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0,0,1)$;

Zadanie 17. Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{1 \leq z \leq 2, x^2+y^2 \leq z^2\}$ o masie M, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$.

Zadanie 18. Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B = \{x^2+y^2 \leq 1 \leq z \leq 2\}$ o masie M, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$.

Zadanie 19. Obliczyć objętość czterowymiarowej kuli o promieniu R i powierzchnię jej brzegu (czyli trójwymiarowej sfery).

Zadanie 20. Znaleźć masę sfery jednostkowej o gęstości powierzchniowej równej odległości od osi z.

Zadanie 21. Obliczyć masę elipsy o osiach (2,1) i gęstości liniowej $\lambda(x,y) := |y|$.

Zadanie 22. Obliczyć siłę, z jaką jednorodna półsfera $S_+ := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ o masie $M = 1$ przyciąga grawitacyjnie punktową masę $m = 1$, umieszczoną w punkcie $(0,0,a) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 1$.

Zadanie 23.

Dowieść, że odwzorowanie $\Phi(u,v) := (\cosh u\, \cos v, \sinh u\, \sin v)$ jest dyfeomorfizmem obszaru $\Omega := \{(u,v) : 0 < v < \pi\}$ na obszar $\Phi(\Omega) = \{(x,y) : y \neq 0 \text{ lub } -1 < x < 1\}$. Wykorzystać parametryzację Φ do obliczenia pola obszaru $K := \{(x,y) : \frac{x^2}{\cosh^2 u_1} + \frac{y^2}{\sinh^2 u_1} \geq 1 \geq \frac{x^2}{\cosh^2 u_2} + \frac{y^2}{\sinh^2 u_2},\ \frac{x^2}{\cos^2 v_1} - \frac{y^2}{\sin^2 v_1} \leq 1 \leq \frac{x^2}{\cos^2 v_2} - \frac{y^2}{\sin^2 v_2},\ x > 0, y > 0\}$ (przy zadanych $0 < u_1 < u_2, 0 < v_1 < v_2 < \frac{\pi}{2}$), którego brzeg stanowią odcinki łuków współogniskowych elips i hiperbol.

Zadanie 24. Niech $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2, 0 \leq z \leq c\}$ oraz $f(x,y,z) := \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2}$. Obliczyć $\int_S f$, $\int_S \frac{1}{f}$.

Zadanie 25. Wykorzystując poprzednie bliczyć objętość bryły obrotowej utworzonej przez:

(a) sześcian o krawędzi a obracający się wokół osi łączącej środki jego dwóch przeciwległych krawędzi;

(b) sześcian o krawędzi a obracający się wokół osi łączącej jego dwa przeciwległe wierzchołki;

(c) czworościan foremny o krawędzi a, obracający się wokół osi łączącej środki jego dwóch przeciwległych krawędzi.

Odpowiedź. (a) $\frac{5\pi\sqrt{2}}{12}a^3$;(b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}a^3$; (c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$.