

Zadania domowe z Analizy II R - całki z parametrem, równania różniczkowe

Zad. 1. Sprawdzić zbieżność jednostajną podanych całek z parametrem.

- a. $I(a) = \int_0^1 \exp(x^a) dx, a \geq 0$
- b. $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0$
- c. $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, a, b > 0$
- d. $K(a) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^2x^2)}}, |a| < 1$
- e. $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+ax}, a \geq 0$
- f. $I(a) = \int_0^1 x^{a-1} \sin(1/x) dx, a \geq 0$
- g. $I(a) = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\cosh(ax)} dx, a > 0$

Zad. 2. Obliczyć podane całki.

- a. $I(a) = \int_0^1 (\log x)^n x^{a-1} dx, a > 0, n \in \mathbb{N}$
- b. $I(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)} dx, a \in \mathbb{R}$
- c. $I(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2} dx, a \geq 0$
- d. $I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\log x} dx, a, b > 0$
- e. $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x} dx, a, b > 0$

Zad. 3. Znaleźć ogólne rozwiązanie podanych równań różniczkowych.

- a. $xyy' + 1 + y^2 = 0$
- b. $xyy' + x^2 + y^2 = 0$
- c. $y' = \frac{4}{(x+y)^2}$
- d. $y' + \frac{y}{x} = 2$
- e. $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$
- f. $(y^2 + x + y)y' + 2xy^2 - y = 0$
- g. $xy'' - y' = x^2e^x$
- h. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$
- i. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$
- j. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos(2x)}$
- k. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

Zad 4. Znaleźć ogólne rozwiązanie podanych układów równań różniczkowych.

- a. $\frac{dx}{dt} = x + y, \frac{dy}{dt} = x + y + t$
- b. $\frac{dx}{dt} = x + y + t, \frac{dy}{dt} = 4x - 3y + 2t$
- c. $\frac{dx}{dt} = -y + t, \frac{dy}{dt} = 4x + 2\cos(2t)$