Krzysztof Mękała

Udowodnić, że jeśli odwzorowanie $f: X \to Y$ jest ciągłe w punkcie x_0, a $g: Y \to Z$ jest ciągłe w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to $g \circ f(x)$ jest ciągłe w x_0.

1) z def. Cauchy'ego $\quad \forall \alpha > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow s(g(f(x)), g(f(x_0))) < \alpha$

$(X,d), (Y,\rho), (Z,s)$ - przestrzenie metryczne

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon & (*) \\ \forall \alpha > 0 \ \exists \beta > 0 : \forall f(x) \in Y \ \rho(f(x), f(x_0)) < \beta \Rightarrow s(g(f(x)), g(f(x_0))) < \alpha & (**) \end{cases}$$

Ustalamy $\alpha > 0$. Korzystając z $(**)$ wybieramy $\beta > 0$ spełniającą warunek:

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \beta \Rightarrow s(g(f(x)), g(f(x_0))) < \alpha$$

Ponieważ $(*)$ ma zachodzić dla każdego ε (także dla $\varepsilon = \beta$), wybieramy $\delta > 0$ dostosowaną do β w taki sposób, że:

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \beta \Rightarrow s(g(f(x)), g(f(x_0))) < \alpha$$

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow s(g(f(x)), g(f(x_0))) < \alpha$$

$\square$

2) z def. Heinego $\quad x_n \to x_0 \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

- $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$
- $y_n \to y_0 \Rightarrow g(y_n) \to g(y_0)$

$y_0 = f(x_0)$

Ponieważ dla dowodu istotne są jedynie te wyrazy y_n, których przeciwobrazy znajdują się w przestrzeni (X, d): $\quad y_n = f(x_n)$. Stąd:

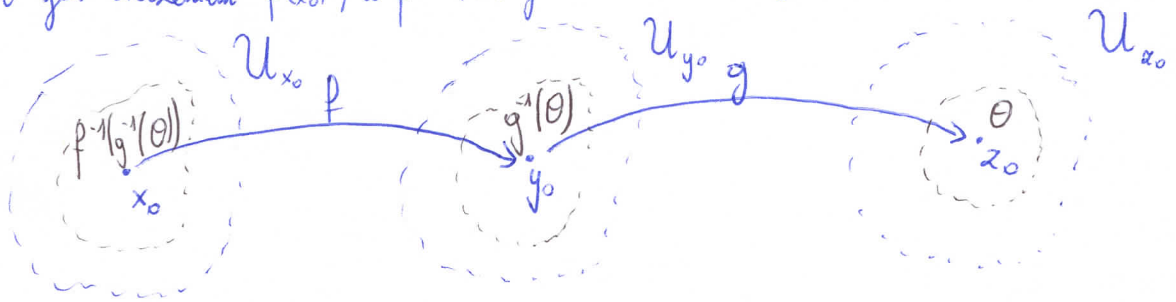
$$f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

$$x_n \to x_0 \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

$\square$

3) Jeśli U jest otoczeniem $f(x_0)$, to $f^{-1}(U)$ jest otoczeniem x_0.



$z_0 = g(f(x_0))$

Θ - otoczenie punktu z_0

$\Theta \in U_{z_0}$

Z ciągłości g: $g^{-1}(\Theta) \in U_{y_0}$

$(g \circ f)^{-1}(\Theta) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(\Theta)}_{\in U_{y_0}}) \in U_{x_0}$ (z ciągłości f)

Warto podkreślić, że rozpatrywane są tylko takie otoczenia punktu z_0, których przeciwobrazy należą do U_{x_0}. Obecność innych otoczeń nie wpływa na strukturę dowodu, bo rozpatrujemy ciągłość odwzorowania: $g \circ f: X \to Z$, które nie musi być surjekcją.

$\square$

W analogiczny sposób można dowieść ogólniejszego twierdzenia: jeśli $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ są ciągłe w każdym punkcie, to $g \circ f(x)$ też jest ciągłe w każdym punkcie.

Odwzorowanie jest ciągłe w każdym punkcie, wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest otwarty. Θ - zbiór otwarty w Z

$g^{-1}(\Theta)$ - otwarty w Y (z ciągłości g)

$(g \circ f)^{-1}(\Theta) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(\Theta)}_{\text{zbiór otwarty w } Y})$ - otwarty w X (z ciągłości f)

Tu także warto zaznaczyć, że rozpatrujemy jedynie te zbiory z Z, których przeciwobrazy znajdują się w X, bo zajmujemy się odwzorowaniem $g \circ f: X \to Z$. Innymi słowy, zbiory, które pod wpływem g^{-1} znajdują swe przeciwobrazy w Y, ale pod wpływem f^{-1} nie trafiają do X (nie istnieją ich przeciwobrazy w X), nie mają praktycznego znaczenia, bo nie podlegają działaniu $g \circ f: X \to Z$.

$\square$