Domknięty podzbiór zbioru zwartego

Wojciech Ciszewski

Niech X będzie przestrzenią, $K \subset X$ zbiorem zwartym, a $D \subset K$ jego domkniętym podzbiorem. Pokażemy, że D jest zbiorem zwartym. Weźmy dowolne pokrycie $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbioru D. Skoro D jest domknięty, $X \setminus D$ jest otwarty. Ponadto

$$(X \setminus D) \cup \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset (X \setminus D) \cup D = X \supset K$$

więc $(U_\alpha)_{\alpha \in A} \cup \{X \setminus D\}$ jest otwartym pokryciem zbioru K. Skoro K jest zwarty, można z tego pokrycia wybrać podpokrycie skończone: $(U_\beta)_{\beta \in B} \cup \{X \setminus D\}$, przy czym $B \subset A$. Mamy, że

$$\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \cup (X \setminus D) \supset K \supset D$$

Możemy odjąć stronami od tej relacji zawierania zbiór $X \setminus D$, otrzymując

$$\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \cup (X \setminus D) \setminus (X \setminus D) \supset D \setminus (X \setminus D)$$

czyli

$$\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \supset D$$

Ale przecież $B \subset A$ i $(U_\beta)_{\beta \in B} \cup \{X \setminus D\}$ jest pokryciem skończonym, więc $(U_\beta)_{\beta \in B}$ jest skończonym podpokryciem pokrycia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbioru D. Rozumowanie zostało przeprowadzone dla dowolnego pokrycia, więc zbiór D jest zbiorem zwartym.