

Analiza III - pierwsze ćwiczenia

Szanowni Państwo, poniżej znajdują Państwo streszczenie materiału dotyczącego całek z parametrem. Będzie to Państwu potrzebne na pierwszych zajęciach.

Całki z parametrem, wersja Riemanna. Rozważać będziemy funkcje postaci

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \text{ jest przedziałem w } \mathbb{R}$$

zadane przy pomocy całki Riemanna, tzn:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx.$$

A może być dowolnym przedziałem. Bywa też, że granice zależą od parametru:

$$F(\lambda) = \int_{\varphi(\lambda)}^{\psi(\lambda)} f(x, \lambda) dx,$$

a bywa, że całka jest niewłaściwa

$$F(\lambda) = \int_I f(x, \lambda) dx, \quad I \text{ jest odcinkiem niezwartym.}$$

Badaniom podlegają takie własności jak ciągłość i różniczkowalność funkcji F , w szczególności sprawdzamy czy wolno przechodzić do granicy, różniczkować i całkować pod znakiem całki. Mówiąc precyzyjnie, kiedy wolno napisać:

$$(1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(x, \lambda) dx,$$

$$(2) \quad \frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx.$$

Jeśli A ma z którejś strony domknięty koniec ciągłość i różniczkowalność mają charakter jednostronny. Rozpatrywać będziemy oddzielnie całki po odcinkach zwartych (czyli właściwe) i niezwartych (czyli niewłaściwe).

Całki po odcinku zwartym. Jest to rzadko spotykana sytuacja, ale zaczyna się od rzeczy podstawowych.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b] \times A$ to funkcja F jest ciągła na A , tzn. dla $\lambda_0 \in A$ zachodzi

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(x, \lambda) dx.$$

Zakres stosowania powyższego twierdzenia można nieco rozszerzyć rozpatrując $f(x, \lambda) = g(x, \lambda)h(x)$. Całka może być wówczas niewłaściwa, ale wszelkie osobliwości muszą tkwić w h , tzn g musi być ciągła jak poprzednio, a h całkowna w sensie (być może) niewłaściwym.

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b] \times A$ i ma ciągłą pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ to funkcja F jest różniczkowalna i zachodzi

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx.$$

Całki po odcinku niezwartym. Powyższe twierdzenia są proste, ale niestety mało przydatne, bo zazwyczaj mamy w praktyce do czynienia z całkami niewłaściwymi. Jako motywacji do dalszej pracy użyłam przykładów:

Przykład 1. Jak obliczyć

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx?$$

Zdefiniować

$$F(\lambda, \mu) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin(\mu x)}{x} dx$$

i obliczyć $F(0, 1)$ różniczkując po μ i przechodząc do granicy względem λ .

Przykład 2. Jak obliczyć

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

Zdefiniować

$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\arctg \lambda x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

i obliczyć $F(1)$ różniczkując po λ .

Definicja 1 (Całka niewłaściwa). Funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie niewłaściwym na przedziale niezwartym I wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki przedział zwarty $K \subset I$, że dla dowolnych dwóch przedziałów zwartych K_1, K_2 zawartych w I i zawierających K zachodzi

$$\left| \int_{K_1} f - \int_{K_2} f \right| < \varepsilon.$$

Definicja 2 (Zbieżność jednostajna). Całka

$$F(\lambda) = \int_I f(x, \lambda) dx$$

jest zbieżna jednostajnie na odcinku $A \subset \mathbb{R}$ jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki przedział zwarty $K \subset I$, że dla dowolnych dwóch przedziałów zwartych K_1, K_2 zawartych w I i zawierających K i dla **każdego** $\lambda \in J$ zachodzi

$$\left| \int_{K_1} f(\cdot, \lambda) - \int_{K_2} f(\cdot, \lambda) \right| < \varepsilon.$$

A może być zwarty albo nie.

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja f jest ciągła na $I \times A$ i całka $F(\lambda)$ jest zbieżna jednostajnie na A to funkcja F jest ciągła na A ,

Twierdzenie 4. Jeżeli funkcja f jest ciągła na $I \times A$ i ma ciągłą pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ oraz obie całki $\int_I f(\cdot, \lambda)$ i $\int_I \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\cdot, \lambda)$ są zbieżne jednostajnie to F jest różniczkowalna i

$$\frac{dF}{d\lambda} = \int_I \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\cdot, \lambda).$$

Jak sprawdzać zbieżność jednostajną?

Twierdzenie 5 (Kryterium Weierstrassa). Jeśli istnieje funkcja dodatnia $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ oraz przedział zwarty $K_0 \subset I$ takie, że $\int_I \varphi$ istnieje oraz dla wszystkich $x \in I \setminus K_0$ oraz dla wszystkich $\lambda \in A$

$$|f(x, \lambda)| \leq \varphi(x)$$

to całka $F(\lambda)$ jest zbieżna jednostajnie na A .

Twierdzenie 6 (Kryterium Dirichleta). Niech $I = [a, \infty[$, $f(x, \lambda) = g(x, \lambda)\varphi(x, \lambda)$. Jeśli funkcja g jest taka, że całka $G(R, \lambda) = \int_a^R g(\cdot, \lambda)$ jest ograniczona a funkcja φ spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \lambda) = 0$, przy czym zbieżność jest jednostajna ze względu na λ , to całka $F(\lambda)$ jest zbieżna jednostajnie na A .

Twierdzenie 7 (Kryterium Abela). Niech $I = [a, \infty[$, $f(x, \lambda) = g(x, \lambda)\varphi(x, \lambda)$. Jeśli funkcja g jest taka, że całka $G(\lambda) = \int_I g(\cdot, \lambda)$ jest zbieżna jednostajnie a funkcja φ jest monotoniczna ze względu na x i ograniczona, to całka $F(\lambda)$ jest zbieżna jednostajnie na A .