

Analiza III

Zadania — seria ostatnia

1. Dowieść, że wyrażenie

$$\langle T, f \rangle = \int_0^1 \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + \int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{dla } f \in \mathcal{S}$$

określa dystrybucję. Pokazać, że $T = (\Theta(x) \log x)'$.

2. Udowodnić, że

$$\frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x} = -\mathcal{P} \frac{1}{x^2},$$

gdzie

$$\langle \mathcal{P} \frac{1}{x^2}, f \rangle := \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx.$$

Czy $x^2 \mathcal{P} \frac{1}{x^2} = 1$?

3. Pokazać, że $(x^2 + y^2)T = 1$ dla dystrybucji T określonej wzorem

$$\langle T, f \rangle = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + y^2} dx dy + \int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} dx dy.$$

4. Znaleźć transformaty Fouriera funkcji

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$$

$$h(x) = \cos^3 x \cdot e^{-x^2}, \quad F(x, y, z) = \frac{e^{-ar}}{r} \quad (a > 0, r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

5. Znaleźć transformaty Fouriera dystrybucji

$$T(x) = \frac{x^2}{1 + (x-1)^2}, \quad R(x) = |x|, \quad P(x) = \arctg x, \quad S(x) = \log |x|.$$

6. Obliczyć splot $f * g$, jeżeli $(\delta_0$ w (ii) oznacza deltę Diraca w zerze)

$$(i) f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}, \quad g(x) = \frac{b}{x^2 + b^2}; \quad (ii) f(x) = \delta_0''(x), \quad g(x) = |x|.$$

7. Znaleźć rozwiązania następujących równań

$$(\sinh x)T(x) = 1, \quad (\sinh x)T(x) = \delta_0(x), \quad xT'(x) = 1, \quad x(x-1)T'(x) = \delta_0.$$