

Spis pytań na egzamin z Analizy I

semestr zimowy 2008/2009

Do egzaminu ustnego dopuszczeni są wszyscy, którzy zaliczyli ćwiczenia niezależnie od wyniku egzaminu pisemnego. W wyjątkowych przypadkach dopuszczeni mogą być także ci, którzy zaliczyli ćwiczenia egzaminem, jeśli wynik egzaminu był bardzo dobry albo jeśli zachodzą wyjątkowe okoliczności (np. związane ze zdrowiem).

Aby otrzymać z egzaminu ocenę dostateczną należy odpowiedzieć poprawnie na trzy pytania zwykle wybrane przez egzaminatora. Należy się spodziewać, że jedno pytanie będzie z początku, drugie ze środka a trzecie z końca semestru. Aby otrzymać ocenę dobrą należy odpowiedzieć poprawnie na dwa pytania zwykle wybrane przez egzaminatora i jedno wymagające dowodu. Zdający ma prawo wybrać jedno z trzech zaproponowanych przez egzaminatora pytań z dowodem. Aby otrzymać ocenę bardzo dobrą trzeba odpowiedzieć na jedno pytanie zwykle i dwa pytania wymagające dowodu wybrane przez egzaminatora.

I. PYTANIA ZWYKŁE

Pytanie 1. Zasada Indukcji Matematycznej, sformułowanie i zastosowania.

Pytanie 2. Ciało liczb wymiernych. Dowód niewymierności $\sqrt{2}$.

Pytanie 3. Przekroje Dedekinda - konstrukcja ciała liczb rzeczywistych

Pytanie 4. Definicja kresów podzbiorów $\mathbb{R}$. Twierdzenie o istnieniu kresów

Pytanie 5. Relacje równoważności, definicja, własności i przykłady.

Pytanie 6. Odwzorowania. Pojęcia surjekcji, iniekcji i bijekcji. Przykłady.

Pytanie 7. Równoliczność. Zbiory skończone i nieskończone. Różne rodzaje nieskończoności. Moce zbiorów liczbowych.

Pytanie 8. Pojęcie ciągu liczbowego, definicja ciągu zbieżnego, operacje na ciągach zbieżnych (idea dowodu zbieżności sumy, ilorazu i iloczynu ciągów zbieżnych). Przykłady ciągów.

Pytanie 9. Podstawowe twierdzenia służące do badania zbieżności ciągów: Twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych i ograniczonych.

Pytanie 10. Definicja liczby e . Definicja funkcji $x \mapsto \exp(x)$ i jej własności.

Pytanie 11. Definicja ciągu Cauchy'ego. Twierdzenie o zbieżności ciągu Cauchy'ego - idea dowodu.

Pytanie 12. Sformułowanie Twierdzenia Stolza. Przykłady zastosowania.

Pytanie 13. Definicja i podstawowe własności funkcji trygonometrycznych.

Pytanie 14. Definicja i podstawowe własności funkcji hiperbolicznych.

Pytanie 15. Definicja i podstawowe własności funkcji odwrotnych do trygonometrycznych.

Pytanie 16. Definicja i podstawowe własności funkcji odwrotnych do hiperbolicznych

Pytanie 17. Definicja granicy funkcji w punkcie. Twierdzenie o granicy sumy, iloczynu i ilorazu funkcji.

- Pytanie 18.** Definicja ciągłości funkcji w punkcie. Przykłady. Twierdzenie o ciągłości sumy, iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji ciągłych. Idea dowodu.
- Pytanie 19.** Funkcje wypukłe. Definicja, własności, nierówności, ciągłość funkcji wypukłej (idea dowodu).
- Pytanie 20.** Definicja Pochodnej funkcji w punkcie. Przykłady funkcji różniczkowalnych. Przykłady obliczania pochodnej z definicji.
- Pytanie 21.** Reguły różniczkowania. Wzory i idea dowodu.
- Pytanie 22.** Pochodne funkcji elementarnych. Wzory i przykłady wyprowadzenia.
- Pytanie 23.** Własności funkcji pochodnej. Twierdzenie Darboux.
- Pytanie 24.** Twierdzenia Rolla, Lagrange’a i Cauchy’ego oraz ich zastosowania.
- Pytanie 25.** Twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej. Zastosowania do obliczania pochodnych funkcji arcus i area.
- Pytanie 26.** Wyższe pochodne, definicja i wzór Leibniza. Szkic dowodu wzoru Leibniza.
- Pytanie 27.** Wzór Taylora. Postać, zachowanie reszty, zastosowania. Skąd wiadomo, że dla małych przyrostów reszta jest mała.
- Pytanie 28.** Reguły de l’Hospitla, idea dowodu, zastosowania.
- Pytanie 29.** Jak szukać ekstremów funkcji jednej zmiennej rzeczywistej? Warunki konieczne i wystarczające.
- Pytanie 30.** Funkcje wypukłe i różniczkowalne: własności pierwszej i drugiej pochodnej.
- Pytanie 31.** Funkcja pierwotna, definicja, przykłady, jednoznaczność.
- Pytanie 32.** Funkcja pierwotna dla funkcji ciągłej na odcinku. Idea dowodu istnienia.
- Pytanie 33.** Całkowanie przez części i podstawienie: wzory wraz z uzasadnieniami i przykładami zastosowania.
- Pytanie 34.** Całkowanie funkcji wymiernych.
- Pytanie 35.** Podstawienia Eulera: jak wyglądają i skąd się biorą.
- Pytanie 36.** Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich: fakty i zastosowania.
- Pytanie 37.** Pojęcie zbieżności bezwzględnej. Twierdzenie Riemanna o szeregach zbieżnych warunkowo.
- Pytanie 38.** Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dowolnych.
- Pytanie 39.** Definicja całki Riemanna na odcinku zwartym.
- Pytanie 40.** Klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna.
- Pytanie 41.** Własności całki Riemanna na odcinku zwartym.

Pytanie 42. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego: sformułowanie, zastosowanie, przykłady.

Pytanie 43. Twierdzenia o całkowaniu przez części i przez podstawienie: sformułowanie, zastosowanie, przykłady.

Pytanie 44. Definicja całki na odcinku niezwartym, przykłady.

Pytanie 45. Bezwzględna i warunkowa zbieżność całki. Przykłady, podstawowe kryteria całkowalności.

Pytanie 46. Kryteria całkowalności Abela i Dirichleta: sformułowanie, przykłady.

Pytanie 47. Definicja szeregu potęgowego, przykłady, promień zbieżności.

Pytanie 48. Ciągłość, różniczkowalność i całkowalność funkcji zadanej szeregiem potęgowym.

Pytanie 49. Funkcje elementarne i ich rozwinięcia w szereg potęgowy.

II. PYTANIA WYMAGAJĄCE PRZEPROWADZENIA DOWODU

Pytanie 1. Twierdzenie o istnieniu kresów wraz z dowodem.

Pytanie 2. Twierdzenie Cantora (o tym, że zbiór podzbiorów zbioru X jest istotnie większy niż X) z dowodem.

Pytanie 3. Twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych i ograniczonych z dowodem.

Pytanie 4. Dowód ciągłości funkcji $x \mapsto \exp(x)$.

Pytanie 5. Dowód Twierdzenia o zbieżności ciągu Cauchy'ego.

Pytanie 6. Definicja i własności zbiorów otwartych w $\mathbb{R}$. Przykłady, charakteryzacja zbiorów otwartych w $\mathbb{R}$.

Pytanie 7. Otwartość a ciągłość odwzorowań. Dowód stosownego twierdzenia.

Pytanie 8. Zbiór zwarty. Dowód zwartości odcinka domkniętego.

Pytanie 9. Zwartość a ciągłość. Dowód stosownego twierdzenia.

Pytanie 10. Twierdzenie Darboux dla pochodnej z dowodem.

Pytanie 11. Twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej z dowodem i zastosowaniami.

Pytanie 12. Wzór Taylora, wyprowadzenie, postaci reszty, zachowanie reszty.

Pytanie 13. Reguły de l'Hospitala z dowodem (przynajmniej niektórych przypadków).

Pytanie 14. Kryteria porównawcze zbieżności szeregów z dowodem.

Pytanie 15. Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego zbieżności szeregów z dowodami.

Pytanie 16. Kryteria Abela i Dirichleta zbieżności szeregów z dowodami.

Pytanie 17. Twierdzenie Riemanna o szeregach zbieżnych warunkowo z dowodem.

Pytanie 18. Twierdzenie o całkowalności funkcji ciągłej na odcinku domkniętym z dowodem.

Pytanie 19. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego: sformułowanie, zastosowanie, dowód.

Pytanie 20. Twierdzenia o całkowaniu przez części i podstawienie dla całki Riemanna: sformułowanie, zastosowanie, dowód.