

# Egzamin ustny z Analizy III

semestr zimowy 2009/2010

*Szanowni Państwo, poniżej znajdują państwo pytania z Analizy III. Tym razem nie dzielę pytań na łatwe i trudne. Nadal obowiązuje zasada, że osoba, która chciałaby dostać piątkę musi umieć dowodzić twierdzenia a osoba, która chce dostać czwórkę musi umieć dowodzić niektóre twierdzenia. Litera **D** przy pytaniu oznacza, że odpowiadając można się wykazać umiejętnością dowodzenia i zarobić na dobry stopień. Litera **F** oznacza, że pytanie jest fundamentalne i koniecznie trzeba umieć na nie odpowiedzieć.*

**Pytanie 1.** Powierzchnia wymiaru  $k$  zanurzona w  $\mathbb{R}^n$ : definicja, przykłady, podstawowe twierdzenia służące do sprawdzania czy dany zbiór jest powierzchnią. (**D, F**)

**Pytanie 2.** Wektor styczny do powierzchni, przestrzeń styczna. (**F**)

**Pytanie 3.** Różniczka funkcji w punkcie, przestrzeń kostyczna. (**F**)

**Pytanie 4.** Bazy w przestrzeniach stycznej i kostycznej związane ze współrzędnymi na powierzchni, zachowanie względem zmiany układu współrzędnych. (**F**)

**Pytanie 5.** Odwzorowanie styczne, definicja, przykłady, macierz, odwzorowanie dualne.

**Pytanie 6.** Pola wektorowe i formy na powierzchni, cofnięcie formy i transport pola.

**Pytanie 7.** Wieloformy na powierzchni. Iloczyn zewnętrzny: definicja i własności. (**D, F**)

**Pytanie 8.** Różniczka zewnętrzna, definicja, własności, wyrażenia we współrzędnych. (**D, F**)

**Pytanie 9.** Formy zamknięte i zupełne, lemat Poincaré. (**D**)

**Pytanie 10.** Orientacja przestrzeni wektorowej i orientacja powierzchni. Forma objętości zorientowanej.

**Pytanie 11.** Całkowanie form po powierzchniach zorientowanych. (**F**)

**Pytanie 12.** Powierzchnie z brzegiem, twierdzenie Stokes'a. (**D, F**)

**Pytanie 13.** Powierzchnie z iloczynem skalarnym. Gradient, dywergencja, rotacja, laplasjan.

**Pytanie 14.** Klasyczne wersje twierdzenia Stokes'a. (**D**)

**Pytanie 15.** Różniczkowalność w sensie zespolonym, równania Cauchy-Riemann'a. (**F**)

**Pytanie 16.** Symbole  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ,  $dz$ ,  $d\bar{z}$ .

**Pytanie 17.** Całka z funkcji zespolonej wzdłuż krzywej, związek z geometrią różniczkową. (**F**)

**Pytanie 18.** Wzór Cauchy'ego (**D, F**)

**Pytanie 19.** Wnioski ze wzoru Cauchy'ego, wzór na pochodną funkcji holomorficznej w punkcie.

**Pytanie 20.** Twierdzenie Liouville'a o funkcjach całkowitych (**D, F**)

**Pytanie 21.** Twierdzenie Taylora o rozwinięciu funkcji holomorficznej w szereg. (**D, F**)

**Pytanie 22.** Logarytm i pierwiastek jako funkcje argumentu zespolonego, wieloznaczność.

**Pytanie 23.** Funkcje holomorficzne w pierścieniu, rozwinięcie w szereg Laurenta'a. (**D**, **F**)

**Pytanie 24.** Różne typy osobliwości izolowanych, residuum funkcji w punkcie osobliwym.

**Pytanie 25.** Twierdzenie o residuach jego zastosowanie do obliczania typowych całek (przykłady).

**Pytanie 26.** Sfera Riemanna, residuum w nieskończoności.

**Pytanie 27.** Funkcje meromorficzne na sferze Riemanna i na  $\mathbb{C}$  (**F**)

**Pytanie 28.** Wzór na liczbę zer i biegunów funkcji meromorficznej. (**D**)

**Pytanie 29.** Rozkład funkcji meromorficznej na ułamki proste. (**D**)

**Pytanie 30.** Przestrzeń funkcji próbnych  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ , zbieżność. (**F**)

**Pytanie 31.** Dystrybucje na przestrzeni  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  - definicja i przykłady. (**F**)

**Pytanie 32.** Operacje na dystrybucjach, przykłady.

**Pytanie 33.** Wykazać, że funkcja  $r \mapsto \log r$ , gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , zadaje dystrybucję regularną na przestrzeni  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Obliczyć  $\Delta T_f$ . (**D**)

**Pytanie 34.** Zbieżność ciągu dystrybucji, ciągu zbieżne do delty Diraca. (Odpowiednie twierdzenie wraz z prostym dowodem.)

**Pytanie 35.** Dystrybucje o zwartym nośniku, przestrzenie  $\mathcal{E}(\mathcal{O})$  i  $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ .

**Pytanie 36.** Transformata Fouriera funkcji, definicja i podstawowe własności. (**D**, **F**)

**Pytanie 37.** Przestrzeń Schwartza, transformata Fouriera na przestrzeni Schwartza, transformata odwrotna. (**D**)

**Pytanie 38.** Transformata Fouriera dystrybucji temperowanych, przykłady.

**Pytanie 39.** Splot funkcji, regularyzacja dystrybucji.