



Pytania na egzamin ustny
Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

Szanowni Państwo, poniższe pytania egzaminacyjne mają (w większości) charakter praktyczny. W związku z każdym pytaniem zadawać będą dodatkowe pytania o materiał teoretyczny związany z zagadnieniem, którego dotyczy pytanie. W trakcie egzaminu każdy zdający odpowiadał będzie na dwa pytania. Studentom, którzy czynnie uczestniczyli w wykładzie przysługuje prawo do wymiany niewygodnego pytania na inne. Dane rachunkowe w pytaniach mogą ulec zmianie.

Pytanie 1. W dwuwymiarowej przestrzeni afinicznej dane są dwa układy współrzędnych $\Phi = (a, e_1, e_2)$, $\Psi = (b, f_1, f_2)$. Znaleźć współrzędne punktu $c = (2, 1)^\Phi$ w układzie współrzędnych Ψ jeśli wiadomo, że

$$b = a + e_1 - 2e_2, \quad f_1 = 2e_1 + e_2, \quad f_2 = -e_1 - e_2.$$

Pytanie 2. Napisać ogólne równanie płaszczyzny afinicznej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć równanie płaszczyzny zadanej parametrycznie jako

$$\begin{cases} x = t - s \\ y = 1 + 2t + s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$$

Pytanie 3. Znaleźć parametryczny opis płaszczyzny $x + 2y + 3z = 5$.

Pytanie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym znaleźć kąt między płaszczyznami

$$\pi_1 : x - 2y + 5z + 2, \quad \pi_2 : 2x + y + z - 1 = 0.$$

Pytanie 5. Co to jest przestrzeń dualna do przestrzeni wektorowej? Podać przykłady kowektorów na przestrzeni $\mathbb{R}_2[\cdot]$.

Pytanie 6. Co to jest baza dualna do danej bazy w przestrzeni wektorowej V . Znaleźć bazę dualną do bazy $f = (f_1, f_2)$ w $\mathbb{R}^2$, jeśli

$$f_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 7. Znaleźć współrzędne kowektora

$$v \mapsto \int_0^1 v(t) dt$$

na przestrzeni $\mathbb{R}_2[\cdot]$ w bazie złożonej z kowektorów $\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1$, gdzie $\varphi_x(v) = v(x)$.

Pytanie 8. Znaleźć bazę w $\mathbb{R}_2[\cdot]$ dualną do bazy $\varphi = (\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$, gdzie $\varphi_x(v) = v(x)$.

Pytanie 9. Uzasadnij, że dla skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej $\dim V^* = \dim V$.

Pytanie 10. Podaj definicję k -wymiarowej powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^n$. Czy jest powierzchnią zbiór $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3$?

Pytanie 11. Wektor v styczny do $\mathbb{R}^2$ w punkcie $(1, 2)$ ma współrzędne $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ w bazie związanej z kartezjańskim układem współrzędnych. Znajdź jego współrzędne w bazie związanej z układem biegunowym.

Pytanie 12. Krzywa w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zadana jest w biegunowym układzie współrzędnych poprzez podanie zależności współrzędnych od czasu t :

$$t \mapsto (r(t), \varphi(t)).$$

Wyrazić długość prędkości krzywej w zależności od funkcji r i φ oraz ich pochodnych.

Pytanie 13. Niech (r, φ) będą współrzędnymi biegunowymi na płaszczyźnie. Wyrazić dr i $d\varphi$ przez dx i dy .

Pytanie 14. Niech (r, φ) będą współrzędnymi biegunowymi na płaszczyźnie. Wyrazić wektory $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ w bazie $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

Pytanie 15. Niech $F : V \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym danym w bazach e (w V) i f (w W) macierzą

$$[F]^f_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz odwzorowania sprzężonego F^* w bazach ϵ, ϕ dualnych odpowiednio do e i f .

Pytanie 16. Baza $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ jest dualna do bazy $f = (f_1, f_2, f_3)$. Dwukowektor α dany jest wzorem

$$\alpha = \varphi^1 \wedge \varphi^2 + 2\varphi^2 \wedge \varphi^3 + 3\varphi^3 \wedge \varphi^1$$

Obliczyć $\alpha(f_1 + f_2, f_3)$.

Pytanie 17. W dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej V dane są dwie bazy $e = (e_1, e_2)$ i $f = (f_1, f_2)$ związane zależnościami:

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = 2e_1 - e_2.$$

Baza $\epsilon = (\epsilon^1, \epsilon^2)$ jest dualna do e a baza $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ dualna do f . Zapisać dwukowektor $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ w bazie φ .

Pytanie 18. Zapisać formę objętości $dx \wedge dy$ na $\mathbb{R}^2$ w bazie związanej z eliptycznym układem współrzędnych

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad a, b > 0.$$

Pytanie 19. Znaleźć formę objętości na torusie zanurzonemu w $\mathbb{R}^3$, o promieniach $R > r$ pochodzącą od kanonicznego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$. Orientację wybrać dowolnie.

Pytanie 20. Co to jest orientacja przestrzeni wektorowej? Co to jest orientacja powierzchni. Podać przykłady.

Pytanie 21. Czy forma $\alpha = xdy + ydx$ określona na $\mathbb{R}^2$ jest zamknięta? Czy jest zupełna? Odpowiedzieć na te same pytania dla formy $\beta = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$ określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pytanie 22. Odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $F(t, s) = (ts, t^2 + s^2, t)$ Obliczyć $F^*(\alpha)$ i $F^*d\alpha$ jeśli $\alpha = xdx + ydy + zdz$.

Pytanie 23. Dlaczego formy różniczkowe całkujemy po powierzchniach zorientowanych a nie po prostu po powierzchniach?

Pytanie 24. Obliczyć całkę z formy $zdx \wedge dy$ po górnej półsfery o promieniu 1 zanurzonej w $\mathbb{R}^3$ z orientacją zadaną jak w Twierdzeniu Stokes'a przez wektor normalny $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$.

Pytanie 25. Obliczyć całkę z formy $zdx \wedge dy$ po górnej półsfery o promieniu 1 zanurzonej w $\mathbb{R}^3$ z orientacją zadaną przez wektor normalny $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, korzystając z Twierdzenia Stokes'a.

Pytanie 26. Powierzchnia M wyposażona jest w iloczyn skalarny. Co to jest gradient funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$? Zapisać gradient funkcji na sferze jednostkowej w $\mathbb{R}^3$ korzystając ze współrzędnych sferycznych i iloczynu skalarnego indukowanego z $\mathbb{R}^3$.

Pytanie 27. Zapisać dywergencję pola wektorowego na $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych (ξ, η)

$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta > 0$$

Pytanie 28. Wyrazić strumień pola wektorowego przez zamkniętą powierzchnię w $\mathbb{R}^3$ przez dywergencję tego pola. Wyjaśnić zapisany wzór.

Pytanie 29. Wyrazić strumień rotacji pola wektorowego X przez dwuwymiarową powierzchnię z brzegiem zanurzoną w $\mathbb{R}^3$ poprzez krążenie tego pola wzdłuż brzegu. Wyjaśnić zapisany wzór.

Pytanie 30. Zapisać laplasjan na $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych biegunowych.

Pytanie 31. Co to jest funkcja holomorficzna?

Pytanie 32. Zapisać równania Cauchy'ego-Riemanna i wyjaśnić do czego służą i skąd się wzięły.

Pytanie 33. Wyjaśnić znaczenie symbolu dz i $\frac{\partial}{\partial z}$ w analizie zespolonej.

Pytanie 34. Obliczyć $\int_{\gamma} z^2 dz$ po połowie okręgu jednostkowego położonej w górnej półpłaszczyźnie zorientowanej kanonicznie.

Pytanie 35. Zapisać wzór całkowy Cauchy’ego i podać kilka wypływających z niego wniosków dotyczących funkcji holomorficzných.

Pytanie 36. Ile to jest i^i ? Przedyskutować definicję logarytmu w sensie zespolonym.

Pytanie 37. Co to jest funkcja całkowita? Sformułować i uzasadnić twierdzenie Liouville’a dotyczące funkcji całkowitych.

Pytanie 38. Sformułować i udowodnić Podstawowe Twierdzenie Algebry posługując się argumentami pochodzącymi z analizy zespolonej.

Pytanie 39. Znaleźć funkcję holomorficzną, której część rzeczywista jest równa $u(x, y) = e^x \sin y$. Co to jest funkcja harmoniczna?

Pytanie 40. Sformułować twierdzenia dotyczące rozwijania funkcji holomorficzných w szereg Taylora.

Pytanie 41. Co to jest przedłużenie analityczne funkcji? Wyjaśnić to pojęcie na wybranym przykładzie.

Pytanie 42. Sformułować twierdzenie dotyczące rozwijania funkcji holomorficzných w pierścieniu w szereg Laurent’a. Podać przykłady.

Pytanie 43. Co to jest residuum? Podać wzór na residuum funkcji f w punkcie, który jest biegunem rzędu k . Wyjaśnić znaczenie pojęcia ”biegun rzędu k ”.

Pytanie 44. Co to jest „przestrzeń funkcji próbnych”. Opisać zbieżność ciągów funkcji próbnych.

Pytanie 45. Wyjaśnić pojęcie „dystrybucja”, podać przykłady i uzasadnić potrzebę używania dystrybucji w teoriach fizycznych.

Pytanie 46. Niech $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Obliczyć Δf w sensie dystrybucji na $\mathbb{R}^2$.