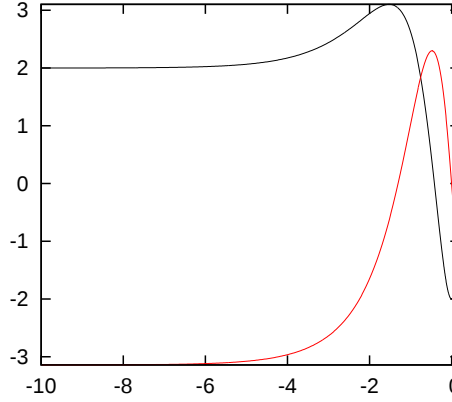




Rys. 11: Pomocne wykresy.

wszystkim $\pi e^t = \pi e^s + 2\pi l$ dla $l \in \mathbb{Z}$, tzn $e^s = e^t + 2l$. Potrzeba ponadto także aby $(e^t - 1)^2 = (e^s - 1)^2$. Wstawiając do drugiego warunku konsekwencję pierwszego, tzn fakt iż $e^s - 1 = e^t + (2l - 1)$ otrzymujemy, że

$$e^t + 2l - 1 = e^t - 1 \quad \text{lub} \quad e^t + 2l - 1 = -e^t + 1$$

Pierwsze równanie zachodzi jedynie dla $l = 0$, a to oznacza $s = t$. Drugie prowadzi do warunku $e^t = 1 - l$ i $e^s = 1 + l$. Oba równania mogą być spełnione dla całkowitych l jedynie gdy $l = 0$, co oznacza $t = s = 0$.

Myśląc w języku współrzędnych biegunowych pomijamy sytuację $r = 0$, φ dowolne, jednak tutaj $r = 0$ oznacza $e^t = 1$, czyli $t = 0$ - jedno rozwiązanie. Stwierdzamy więc, że odwzorowanie κ jest iniektywne. Nadal więc nie znaleźliśmy żadnych kłopotów w punkcie $(1, 0)$, które widać na rysunku. Zauważymy je dopiero, gdy zwrócimy uwagę na fakt, że co prawda równanie $e^t = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{R}$, to spełnia je $-\infty$. W granicy $t \rightarrow -\infty$ nasza krzywa $t \rightarrow \kappa(t)$ zmierza więc do punktu, który już raz minęła przy $t = \log 2$, czyli właśnie do punktu $(1, 0)$. Morał z tego przykładu jest taki: nie wystarczy sprawdzić rzędu odwzorowania i jego iniektywności, żeby mieć pewność, że obraz tego odwzorowania jest powierzchnią! ♣

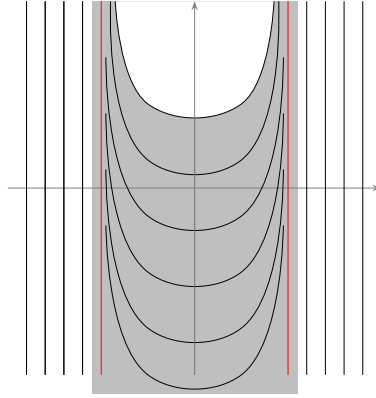
2 Rozmaitości różniczkowe

Powierzchnie zanurzone, o których rozmawialiśmy na poprzednim wykładzie są bardzo istotną klasą przykładów rozmaitości różniczkowych. Pod koniec dzisiejszego wykładu okaże się, że przykłady te są nie tylko bardzo istotne, ale także bardzo ogólne. Na razie zajmijmy się jednak definiowaniem bardziej abstrakcyjnego pojęcia rozmaitości, nie odwołującego się do zanurzenia w przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

Definicja 5 *Rozmaitością* M wymiaru n nazywamy przestrzeń topologiczną Hausdorffa taką, że każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie otwarte $\mathcal{O}$ homeomorficzne z pewnym otwartym zbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Przypominamy, że w tym kontekście homeomorfizm oznacza ciągłą bijekcję, której odwrotność też jest ciągła. Powyższa definicja wyraża taką intuicję, że rozmaitość jest to zbiór, który lokalnie

wygląda jak kawałek $\mathbb{R}^n$, natomiast nie wspomina o strukturze różniczkowej. Nie ma więc sensu jakiegokolwiek różniczkowanie funkcji określonej na rozmaitości w powyższym sensie, można za to mówić o odwzorowaniach ciągłych. Żeby podkreślić fakt braku struktury różniczkowej o takich rozmaitościach mówi się często dodając przymiotnik *topologiczne*. Przypominamy również, że przestrzeń Hausdorffa jest to taka przestrzeń topologiczna w której każde dwa punkty mają rozłączne otoczenia. Większość przestrzeni topologicznych, z którymi spotyka się fizyk, ma tę własność. Podanie przykładu przestrzeni, która nie jest przestrzenią Hausdorffa wymaga namysłu. Ja mam w zanadrzu następujący przykład: punktami przestrzeni są krzywe (niektóre dosyć proste) na rysunku. Te krzywe, które znajdują się w centralnej części asymptotycznie (w górę) dążą do prostych $x = 1$ i $x = -1$. Otoczenia składają się z sąsiadujących krzywych.



Rys. 12: Przestrzeń nie-Hausdorffa.

W ten sposób proste $x = 1$ i $x = -1$ nie mają rozłącznych otoczeń. Przykład jest opisany w sposób nie bardzo precyzyjny, nie koncentrujemy się jednak na kwestiach topologicznych.

Sama struktura topologiczna i homeomorfizmy z $\mathbb{R}^n$ nie wystarcza do naszych celów. My chcielibyśmy zajmować się analizą na rozmaitościach, w szczególności chcielibyśmy coś różniczkować. W tym celu potrzebujemy bogatszej struktury. Zaobserwujmy najpierw, że pojęcie wymiaru ma sens, ponieważ nie ma homeomorfizmów z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ dla $m \neq n$ (bez dowodu). Odwzorowanie $\varphi : M \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będące homeomorfizmem (występującym w definicji rozmaitości) nazywamy *lokalną mapą* na rozmaitości M , lub *lokalnym układem współrzędnych*. Kolekcję lokalnych map o tej własności, że każdy punkt rozmaitości należy do dziedziny przynajmniej jednej mapy, nazywamy *atlasem* na rozmaitości M . W przypadku, kiedy dwie mapy mają dziedziny o niepustym przecięciu możemy mówić o odwzorowaniu zmiany współrzędnych:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \cap \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow \psi & \swarrow \psi \circ \varphi^{-1} \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Odwzorowanie $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma dobrze nam znane dziedzinę i przeciwdziedzinę - otwarte podzbiory w $\mathbb{R}^n$. W szczególności potrafimy sprawdzać różniczkowalność takich odwzorowań. Mówimy, że *atlas jest klasy $\mathcal{C}^k$* , jeśli wszystkie odwzorowania zmiany współrzędnych są klasy $\mathcal{C}^k$. Można mówić także o atlasie gładkim ($\mathcal{C}^\infty$) oraz analitycznym ($\mathcal{C}^\omega$).

Definicja 6 *Rozmaitością różniczkową klasy $\mathcal{C}^k$* nazywamy rozmaitość wraz z atlasem klasy $\mathcal{C}^k$. Mówimy także o *rozmaitościach gładkich*, tzn klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz *analitycznych*, tzn $\mathcal{C}^\omega$.

W trakcie naszego wykładu rozważać będziemy właściwie jedynie rozmaitości gładkie.

Występujący w definicji powierzchni zanurzonej układ współrzędnych w otoczeniu punktu, taki, że przynależność do powierzchni oznacza znikanie ostatnich współrzędnych dostarcza lokalnej mapy - należy wziąć pierwsze nieznikające k współrzędnych. Formalnie oznacza to, że składamy układ współrzędnych Φ z rzutem na podprzestrzeń w $\mathbb{R}^k \in \mathbb{R}^n$.

Przykład 6 W przestrzeni $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ wprowadzamy relację równoważności

$$(z, w) \sim (z', w') \iff \exists \rho \in \mathbb{C}_* : z = \rho z' \quad w = \rho w'.$$

Rozważamy zbiór $M = X/\sim$ klas abstrakcji względem powyższej relacji. Jest to w naturalny sposób przestrzeń topologiczna - wyposażona jest w topologię ilorazową. Zbiór $\mathcal{O} \subset M$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w X . Symbolem π oznaczamy kanoniczną projekcję $\pi : X \rightarrow M$ na przestrzeń ilorazową. Wprowadźmy teraz w M strukturę rozmaitości gładkiej: Wyróżniamy dwa zbiory otwarte $\mathcal{O}, \mathcal{U} \subset M$:

$$\mathcal{O} = \{[z, 1] : z \in \mathbb{C}\},$$

$$\mathcal{U} = \{[1, w] : w \in \mathbb{C}\}.$$

Zauważmy, że $[0, 1] = \{(0, w)\}$, $[1, 0] = \{(z, 0)\}$ oraz $[1, 0] \in \mathcal{U}$, $[0, 1] \in \mathcal{O}$, ponadto $\mathcal{U} = M \setminus \{[0, 1]\}$ i $\mathcal{O} = M \setminus \{[1, 0]\}$. Mamy więc

$$M = \mathcal{O} \cup \mathcal{U}.$$

Otwartość obu zbiorów także nie podlega dyskusji. Potrzebujemy teraz odwzorowania w $\mathbb{R}^n$ ze stosownym n . Definiujemy zatem

$$\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi([z, 1]) = (\Re(z), \Im(z)),$$

$$\psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi([1, w]) = (\Re(w), -\Im(w)).$$

Obrazy obydwu map to cała przestrzeń $\mathbb{R}^2$, φ, ψ są homeomorfizmami. Sprawdźmy teraz czy zadają strukturę rozmaitości różniczkowej. Dla ułatwienia rachunków oznaczamy

$$z = x + iy \quad \varphi([z, 1]) = (x, y)$$

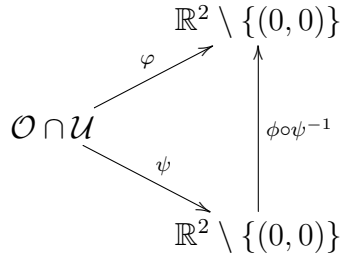
$$w = a + bi \quad \psi([1, w]) = (a, -b).$$

Przecięcie $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ składa się z klas abstrakcji par takich, że żadna współrzędna nie jest równa zero. Możemy w każdej takiej klasie znaleźć reprezentantów obu typów $(z, 1)$ i $(1, w)$. Warunek równoważności $[z, 1] = [1, w]$ oznacza, że

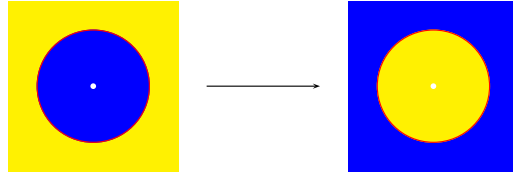
$$z = \frac{1}{w}, \quad \text{czyli} \quad x + iy = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Odwzorowanie zamiany współrzędnych, które parze (a, b) przypisuje parę (x, y) jest postaci

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (a, b) \longmapsto \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$



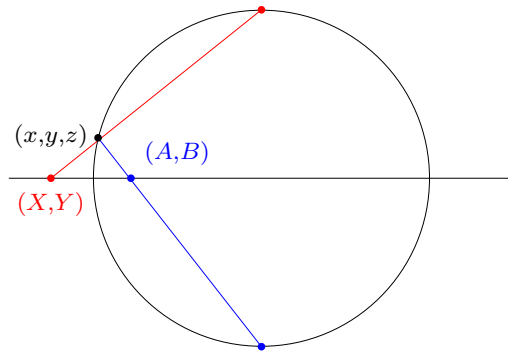
Widać, że odwzorowanie zamiany współrzędnych jest odwzorowaniem gładkim. Jest to inwersja względem okręgu jednostkowego (Rys. 13). Jak Państwo sądzą, którą z dobrze znanych dwu-



Rys. 13: Inwersja względem okręgu.

wymiarowych powierzchni właśnie opisaliśmy? Odgadnąć to można przyglądając się wzorom dotyczącym zamiany zmiennych. Wzory te wyglądają zupełnie tak samo jak wzory związane z zamianą zmiennych stereograficznych na sferze S^2 związanych z biegunami północnym i południowym. Istotnie, weźmy $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ i zapiszmy współrzędne stereograficzne względem obu biegunów:

$$\begin{array}{ll}
 X = \frac{x}{1-z} & A = \frac{x}{1+z} \\
 Y = \frac{y}{1-z} & B = \frac{y}{1+z}
 \end{array}$$



Rys. 14: Współrzędne stereograficzne.

$$X = \frac{A}{A^2 + B^2} \quad Y = \frac{B}{A^2 + B^2}.$$

Spodziewamy się więc, że nasza rozmaitość M to sfera S^2 . Bezpośrednie odwzorowanie $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, którego obrazem jest S^2 można zdefiniować następująco:

$$F([x + iy, 1]) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right), \quad F([0, 1]) = (0, 0, 1).$$

Należałoby oczywiście sprawdzić, czy jest to odwzorowanie klasy przynajmniej gładkie, odwracalne po obcięciu do obrazu i czy jego odwrotność jest także gładka. Rachunki te jednak pominiemy. Standardowo rozmaitość M oznaczana jest $\mathbb{C}P^1$ i nazywana zespoloną przestrzenią projektywną wymiaru (zespolonego) 1. Startując z $\mathbb{C}^{n+1}$ konstruujemy w identyczny sposób $\mathbb{C}P^n$. Właśnie pokazaliśmy, że $\mathbb{C}P^1$ jest dyfeomorficzna z S^2 . Pozostałe zespolone przestrzenie projektywne nie mają takich prostych reprezentacji. Można także konstruować rzeczywiste przestrzenie projektywne $\mathbb{R}P^n$ dzieląc $\mathbb{R}^{n+1}$ bez zera przez stosowną relację równoważności. Nietrudno stwierdzić, że $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$.



Inne przykłady znanych (lub nie) dwuwymiarowych powierzchni tworzyć można wprowadzając różną relację równoważności w $\mathbb{R}^2$:

Przykład 7 Pierwsza relacja to:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff y = y', x' - x \in \mathbb{Z}$$

Jest oczywiste, że $\mathbb{R}^2/\sim$ jest dyfeomorficzne z walcem. Każda klasa równoważności ma reprezentanta w pasku $[0, 1[\times \mathbb{R}$, proste $x = 0$ i $x = 1$ utożsamiamy.



Przykład 8 Druga relacja (dla wygody zmniejszymy trochę rozmiar w pionie) jest relacją w $\mathbb{R} \times]-1, 1[$

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x' - x = k \in \mathbb{Z}, \quad y' = (-1)^k y.$$

Znowu obserwujemy, że każda klasa równoważności ma reprezentanta w pasku $[0, 1[\times]-1, 1[$ oraz że odcinki $x = 0$ i $x = 1$ utożsamiamy zmieniając jednak ich orientację. Wynikiem jest wstęga Moebiusa.

Do opisanego wstęgi Moebiusa potrzebne są dwie mapy: z dziedziną $\mathcal{U} = \{[(x, y)] : x \notin \mathbb{Z}\}$ oraz $\mathcal{O} = \{[(x, y)] : x \in]k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}[\}$: Dla każdej klasy leżącej w $\mathcal{U}$ istnieje reprezentant (α, y) taki, że $\alpha \in]0, 1[$. Definiujemy odwzorowanie

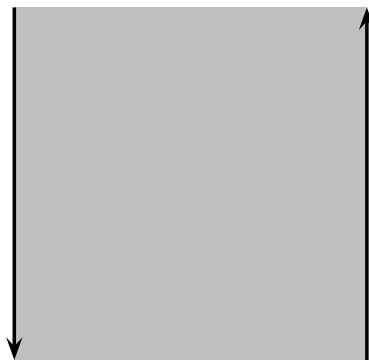
$$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi([\alpha, y]) = (\alpha, y).$$

Dla każdej klasy leżącej w $\mathcal{O}$ istnieje reprezentant (β, y) taki, że $\beta \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$. Definiujemy odwzorowanie

$$\psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi([\beta, y]) = (\beta, y).$$

Przyjrzyjmy się jeszcze zamianie współrzędnych. Zbiór $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ składa się z dwóch składowych spójnych $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$

W obszarze $\mathcal{A}$ zamiana zmiennych ma postać $\psi \circ \varphi^{-1}(\alpha, y) \mapsto (1 + \alpha, -y)$, zaś w obszarze $\mathcal{B}$ zamiana ta jest identycznością. ♣



Rys. 15: Wstęga Moebiusa.



Rys. 16: Wstęga Moebiusa - mapy.

Przykład 9 Ostatniego przykładu dostarcza następująca relacja w $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x' - x = k \in \mathbb{Z}, \quad y' - (-1)^k y \in \mathbb{Z}.$$

Obserwujemy, że każda klasa równoważności ma reprezentanta w kwadracie $[0, 1[\times [0, 1[$, przy czym brzegi kwadratu są utożsamione jak na rysunku. Powstała rozmaitość nosi nazwę butelki Kleina. Nie da się ona zanurzyć w przestrzeń $\mathbb{R}^3$, potrzebujemy do tego wymiaru 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ możemy ją zwizualizować jedynie dopuszczając samoprzecięcie (Rys. 18). ♣

Mając dwie rozmaitości różniczkowe M i N możemy wypowiadać się o różniczkowalności odwzorowań między nimi.

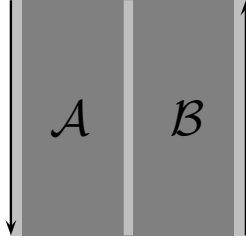
Definicja 7 Mówimy, że *odwzorowanie* $f : M \rightarrow N$ *jest klasy* $\mathcal{C}^k$ jeśli dla każdej pary lokalnych map $(\mathcal{O}, \varphi)$ na M i $(\mathcal{U}, \psi)$ na N odwzorowanie $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy $\mathcal{C}^k$. Rozmaitości M i N muszą być klasy przynajmniej $\mathcal{C}^k$.

Łatwo stwierdzić, że różniczkowalność wystarczy sprawdzać w wybranych mapach dbając aby ich dziedziny pokrywały M i zbiór $f(M) \subset N$.

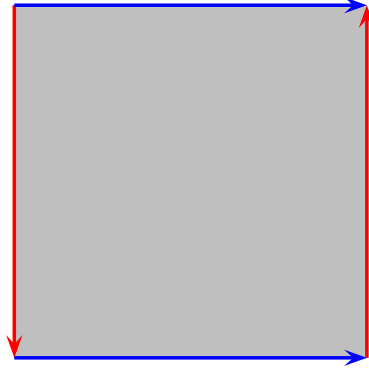
Na sam koniec zanotujmy twierdzenie

Twierdzenie 3 [Whitney] Każda parazwarta różniczkowalna i spójna powierzchnia wymiaru n może zostać zanurzona w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Powyższe twierdzenie pokazuje, że szczególne przykłady rozmaitości, czyli powierzchnie zanurzone, są w istocie bardzo ogólne. Na wszelki wypadek wyjaśnijmy, że przestrzeń topologiczna jest *parazwarta*, jeśli w każde jej pokrycie otwarte można wpisać pokrycie lokalnie skończone, tzn takie, że każdy punkt należy do skończonej liczby elementów pokrycia.



Rys. 17: Wstęga Moebiusa - mapy.



Rys. 18: Butelka Kleina.

Niech $\mathcal{C}^\infty(M)$ oznacza zbiór wszystkich gładkich funkcji na rozmaitości M . $\mathcal{C}^\infty(M)$ jest rzeczywistą, przemianą algebrą z jedyneką. Istotną rolę w geometrii różniczkowej odgrywają homomorfizmy tej algebry w $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ też traktowane jest tu jak rzeczywista przemiana algebra z jedyneką). Każdy punkt $q \in M$ zadaje taki homomorfizm, mianowicie

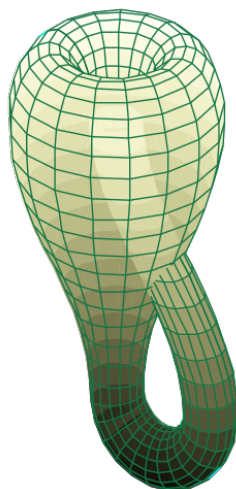
$$\varphi_q : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_q(f) = f(q).$$

Sprawdzenie, że takie odwzorowanie jest homomorfizmem polega na sprawdzeniu, że jest liniowe oraz że zachowuje strukturę mnożenia i element neutralny. Można pokazać, że homomorfizmy zadawane przez punkty są jedynymi homomorfizmami algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ w $\mathbb{R}$. Mamy więc pewien rodzaj dualności między rozmaitością a algebrą funkcji gładkich na niej.

Okazuje się, że rozmaitość różniczkowalną można definiować algebraicznie wykorzystując zaobserwowaną przez nas przed chwilą dualność. Niech $\mathcal{F}$ będzie rzeczywistą przemianą algebrą z jedyneką, a $|\mathcal{F}| = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ zbiorem homomorfizmów. Wiemy już, że gdy $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(M)$ to $|\mathcal{F}| = M$. Powstaje pytanie czy dla każdej algebry $\mathcal{F}$ znajdziemy rozmaitość M taką że $|\mathcal{F}| = M$, czyli czy każda rzeczywista algebra przemiana z jedyneką jest algebrą funkcji na jakiejś rozmaitości. Odpowiedź brzmi nie. W szczególności algebra taka musi spełniać warunek

$$\bigcap_{\varphi \in |\mathcal{F}|} \ker \varphi = 0$$

gdyż nie ma nietrywialnych funkcji na rozmaitości znikających we wszystkich punktach. Algebry, które mają tę własność nazywają się *geometryczne*. Szczegółowe rozważania na temat jakie algebry mogą być algebrami funkcji i precyzyjną definicję rozmaitości w tym języku znaleźć można w książce Jet Niestruev "Smooth manifolds and observables". Motywacją do takiego



Rys. 19: Butelka Kleina.

podejścia stanowią rozważania nad mechaniką kwantową. Klasyczna geometria różniczkowa stanowi naturalny język do opisywania świata fizyki klasycznej (w sensie niekwantowej). Przestrzenie konfiguracyjne dla układów klasycznych mają strukturę różnistości, czasoprzestrzeń w OTW też jest pewną różnistością. Wielkości takie jak prędkość, pęd, energia, siła, metryka... pole elektromagnetyczne dają się bardzo dobrze opisać właśnie w języku geometrii różniczkowej. Problem pojawia się, kiedy przechodzimy do mechaniki kwantowej i okazuje się, że natychmiast wypadamy ze schematu algebry przemiennej. W szczególności potrzebujemy „przestrzeni” na której współrzędne nie są przemienne. Należałoby więc algebrę przemienią zastąpić nieprzemienią. W ten sposób powstała geometria nieprzemienią. Z jej zastosowaniami w fizyce bywa różnie, ale jako teoria matematyczna ma się bardzo dobrze. Nie będziemy szczegółowo rozwijać podejścia Jeta Niestruyeva, spójrzmy tylko na kilka przykładów różnistości, o których mówiliśmy wcześniej.

Przykład 10 Jeśli $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f(x) = f(x+1)\}$ to $|\mathcal{F}| = S^1$. ♣

Przykład 11 Jeśli $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) : f(x, y) = f(x+1, -y)\}$ to $|\mathcal{F}|$ jest wstęgą Moebiusa. ♣

Przykład 12 Jeśli $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) : f(x) = f(x+1, -y) = f(x, y+1)\}$ to $|\mathcal{F}|$ jest butelką Kleina. ♣

3 Wektory styczne i kostyczne

W dalszym ciągu korzystać będziemy (lokalnie) ze struktury $\mathcal{C}^\infty(M)$. Potrzebne będą także gładkie krzywe, tzn elementy $\mathcal{C}^\infty(I, M)$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest otwartym odcinkiem w $\mathbb{R}$ zawierającym zero. Definiujemy dwie relacje równoważności: