

Rys. 19: Butelka Kleina.

podejścia stanowią rozważania nad mechaniką kwantową. Klasyczna geometria różniczkowa stanowi naturalny język do opisywania świata fizyki klasycznej (w sensie niekwantowej). Przestrzenie konfiguracyjne dla układów klasycznych mają strukturę różnistości, czasoprzestrzeń w OTW też jest pewną różnistością. Wielkości takie jak prędkość, pęd, energia, siła, metryka... pole elektromagnetyczne dają się bardzo dobrze opisać właśnie w języku geometrii różniczkowej. Problem pojawia się, kiedy przechodzimy do mechaniki kwantowej i okazuje się, że natychmiast wypadamy ze schematu algebry przemiennej. W szczególności potrzebujemy „przestrzeni” na której współrzędne nie są przemienne. Należałoby więc algebrę przemienią zastąpić nieprzemienią. W ten sposób powstała geometria nieprzemienią. Z jej zastosowaniami w fizyce bywa różnie, ale jako teoria matematyczna ma się bardzo dobrze. Nie będziemy szczegółowo rozwijać podejścia Jeta Niestruyeva, spójrzmy tylko na kilka przykładów różnistości, o których mówiliśmy wcześniej.

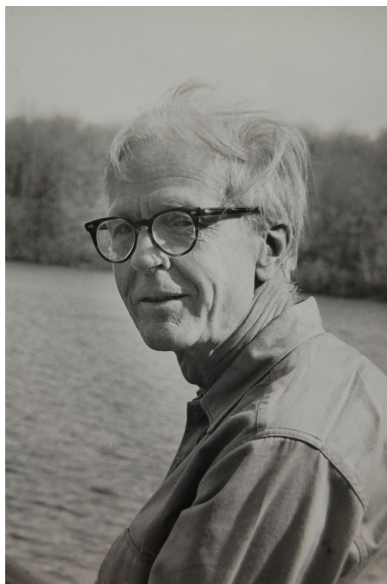
Przykład 10 Jeśli $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f(x) = f(x+1)\}$ to $|\mathcal{F}| = S^1$. ♣

Przykład 11 Jeśli $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) : f(x, y) = f(x+1, -y)\}$ to $|\mathcal{F}|$ jest wstęgą Moebiusa. ♣

Przykład 12 Jeśli $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) : f(x) = f(x+1, -y) = f(x, y+1)\}$ to $|\mathcal{F}|$ jest butelką Kleina. ♣

3 Wektory styczne i kostyczne

W dalszym ciągu korzystać będziemy (lokalnie) ze struktury $\mathcal{C}^\infty(M)$. Potrzebne będą także gładkie krzywe, tzn elementy $\mathcal{C}^\infty(I, M)$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest otwartym odcinkiem w $\mathbb{R}$ zawierającym zero. Definiujemy dwie relacje równoważności:



Rys. 20: Hassler Whitney (1901-1989).

Definicja 8 Niech $\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$. Mówimy, że krzywe γ i γ' są równoważne jeśli

$$\gamma(0) = \gamma'(0) \quad \text{oraz} \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \gamma')}{dt}(0).$$

Złożenie $f \circ \gamma$ jest gładką funkcją rzeczywistą określoną w otoczeniu zera, więc wyznaczanie pochodnej w $t = 0$ ma sens. Klasę równoważności krzywej γ oznaczamy $\dot{\gamma}(0)$ albo $\mathbf{t}\gamma(0)$ i nazywamy *wektorem stycznym* do M w punkcie q . Zbiór wszystkich wektorów stycznych to *przestrzeń styczna* oznaczana $\mathbf{T}M$.

Łatwo zauważyć, że istnieje kanoniczne odwzorowanie $\tau_M : \mathbf{T}M \rightarrow M$, $\tau_M(\dot{\gamma}(0)) = \gamma(0)$. O klasach równoważności krzywych mówimy, że są to *wektory* styczne, ale na razie żadnej struktury wektorowej na przestrzeni stycznej nie wprowadziliśmy. Dużo łatwiej jest zacząć od przestrzeni kostycznej.

Definicja 9 W zbiorze par (q, f) , gdzie $q \in M$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definiujemy relację równoważności następującym warunkiem: dwie pary (q, f) i (q', f') są równoważne jeśli

$$q = q', \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M), \gamma(0) = q \quad \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(f' \circ \gamma)}{dt}(0).$$

Klasę równoważności pary (q, f) oznaczamy $\mathbf{d}f(q)$ i nazywamy *różniczką funkcji f* w punkcie q . Zbiór wszystkich różniczek to *przestrzeń kostyczna* oznaczana $\mathbf{T}^*M$.

Podobnie jak dla przestrzeni stycznej, istnieje kanoniczne odwzorowanie $\pi_M : \mathbf{T}^*M \rightarrow M$, $\pi_M(\mathbf{d}f(q)) = q$.

Zajmiemy się teraz strukturą przestrzeni kostycznej. Struktura przestrzeni wektorowej w algebrze $\mathcal{C}^\infty(M)$ jest zachowywana przez relację równoważności, tzn jeśli para (q, f) jest równoważna (q, f') oraz para (q, g) jest równoważna (q, g') to także $(q, f + g)$ jest równoważna $(q, f' + g')$, innymi słowy

$$\mathbf{d}f(q) + \mathbf{d}g(q) = \mathbf{d}(f + g)(q).$$



Rys. 21: Alexander Vinogradov (Jet Niestruyev).

Podobnie jeśli para (q, f) jest równoważna (q, f') to para $(q, \lambda f)$ jest równoważna parze $(q, \lambda f')$, czyli

$$\lambda df(q) = d(\lambda f)(q).$$

Przestrzeń różniczek funkcji zaczepionych w jednym punkcie (T_q^*M) jest więc przestrzenią wektorową. O każdej przestrzeni wektorowej chcemy zazwyczaj wiedzieć, jaki jest jej wymiar i jak wyglądają bazy tej przestrzeni:

Fakt 1 *Każdą różniczkę $df(q)$ można jednoznacznie zapisać jako kombinację liniową różniczek funkcji x^i tworzących układ współrzędnych w otoczeniu punktu q .*

Dowód: Niech $\mathcal{U}$ będzie dziedziną mapy zawierającą q i niech $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ oznacza współrzędne w $\mathcal{U}$ takie, że $\varphi(q) = (0, \dots, 0)$. Rozważmy układ n krzywych γ_i zdefiniowanych jako

$$t \mapsto \gamma_i(t) = \varphi^{-1}(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0),$$

gdzie t jest na i -tej pozycji. Wprowadzamy oznaczenie

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(q) = \frac{d(f \circ \gamma_i)}{dt}(0).$$

Inaczej mówiąc $\frac{\partial f}{\partial x^i}(q)$ jest pochodną cząstkową względem i -tej współrzędnej funkcji $f \circ \varphi^{-1}$ w punkcie $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Oznaczmy przez $\tilde{f}$ funkcję

$$\tilde{f} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(q)x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(q)x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(q)x^n.$$

Łatwo zauważyć, że pary (q, f) i $(q, \tilde{f})$ są równoważne, czyli różniczki $df(q)$ i $d\tilde{f}(q)$ są równe:

$$df(q) = d\tilde{f}(q) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(q)x^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(q)x^n\right)(q) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(q)dx^1(q) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(q)dx^n(q).$$

Różniczka funkcji f jest więc istotnie kombinacją liniową różniczek współrzędnych. Do wykazania pozostaje jednoznaczność, czyli liniowa niezależność różniczek dx^i . Załóżmy więc, że $\sum_i \lambda_i dx^i(q) = 0$. Z definicji mnożenia różniczek przez liczbę wiemy, że

$$\sum_i \lambda_i dx^i(q) = d(\sum_i \lambda_i x^i)(q).$$

Jeśli $\sum_i \lambda_i dx^i(q) = 0$ to funkcja $h = \sum_i \lambda_i x^i$ jest równoważna funkcji zerowej, a to oznacza, że dla każdej z krzywych γ_i funkcja $h \circ \gamma_i$ ma zerową pochodną w $t = 0$:

$$0 = \frac{d(h \circ \gamma_i)}{dt}(0) = \frac{d(\lambda_i t)}{dt}(0) = \lambda_i. \quad \square$$

Przestrzeń kostyczna w punkcie q jest zatem n -wymiarową przestrzenią wektorową. Wróćmy do struktury wektorowej przestrzeni stycznej. Każdy wektor styczny $v = \dot{\gamma}(0)$ definiuje funkcjonal liniowy φ_v na przestrzeni T_q^*M (jeśli $\gamma(0) = q$) wzorem

$$\phi_v(df(q)) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0).$$

Przyporządkowanie funkcjonałów wektorom jest injektywne. Jeśli dwie krzywe są nierównoważne, to znaczy istnieją przynajmniej dwie funkcje gładkie, które je rozróżniają. Z definicji relacji równoważności par punkt-funkcja wnioskujemy, że także różniczki tych funkcji są różne. Z drugiej strony, każdy funkcjonal na T_q^*M odpowiada pewnemu wektorowi stycznemu. Istotnie, skoro $(dx^1(q), \dots, dx^n(q))$ jest bazą w T_q^*M , to każdy funkcjonal jest jednoznacznie zadany przez układ n liczb $\phi^i = \phi(dx^i(q))$. Weźmy krzywą

$$t \mapsto \varphi^{-1}(\phi^1 t, \phi^2 t, \dots, \phi^n t).$$

Wektor styczny do tej krzywej odpowiada funkcjonałowi równemu ϕ . Możemy zatem $T_q M$ zidentyfikować jako zbiór z $(T_q^* M)^*$ i w ten sposób wprowadzić w $T_q M$ strukturę przestrzeni wektorowej.

Przestrzeń styczna i kostyczna w punkcie stanowią zatem parę wektorowych przestrzeni dualnych. Elementy bazy dualnej do $(dx^1, \dots, dx^n)$ (od tej chwili nie będziemy pisać argumentu q przy różniczkach funkcji współrzędnościowych) oznaczamy

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \quad \text{lub} \quad (\partial_1, \dots, \partial_n).$$

Wektor $\frac{\partial}{\partial x^i}$ jest styczny do krzywej $t \mapsto \varphi^{-1}(x^1(q), \dots, x^i(q) + t, \dots, x^n(q))$.

Oznaczenia na wektory styczne do krzywych wzdłuż współrzędnych przypominają operatory różniczkowania i nie jest to przypadkowa zbieżność oznaczeń.

Definicja 10 Niech A i B będą dwiema algebrami rzeczywistymi, przemiennymi, z jedynek i niech $\rho : A \rightarrow B$ oznacza homomorfizm tych algebr. Odwzorowanie $D : A \rightarrow B$, które jest liniowe i spełnia warunek

$$D(a_1 a_2) = \rho(a_1) D(a_2) + \rho(a_2) D(a_1)$$

nazywamy *różniczkowaniem względem homomorfizmu ρ* .

Powyższy warunek przypomina regułę Leibniza znaną z rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej. Istotnie operacja brania pochodnej w punkcie jest różniczkowaniem algebry różniczkowalnych funkcji rzeczywistych względem homomorfizmu będącego ewaluacją funkcji w punkcie. Zauważmy, że $D(1_A) = 0$, ponieważ

$$D(1_A) = D(1_A 1_A) = \rho(1_A)D(1_A) + \rho(1_A)D(1_A) = 1_B D(1_A) + 1_B D(1_A) = 2D(1_A).$$

W dalszym ciągu będziemy rozważać różniczkowania algebry funkcji gładkich na rozmaitości M o wartościach w algebrze $\mathbb{R}$ względem ewaluacji funkcji w punkcie q . Zbiór tych różniczkowań jest oczywiście wyposażony w strukturę przestrzeni wektorowej, gdyż jest podprzestrzenią w przestrzeni wszystkich odwzorowań liniowych z A do B . Niech teraz $v = \dot{\gamma}(0)$ będzie wektorem stycznym w punkcie $\gamma(0) = q$. Wektorowi temu przypisać można następujące różniczkowanie:

$$D_v(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0).$$

Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru reprezentanta wektora stycznego a także rzeczywiście definiuje różniczkowanie, gdyż

$$\begin{aligned} D_v(fg) &= \frac{d(fg) \circ \gamma}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \gamma)(g \circ \gamma)}{dt}(0) = \\ &= f(\gamma(0)) \frac{dg \circ \gamma}{dt}(0) + g(\gamma(0)) \frac{df \circ \gamma}{dt}(0) = f(q)D_v(g) + g(q)D_v(f). \end{aligned}$$

Różne wektory styczne definiują różne różniczkowania, co wynika wprost z definicji wektora stycznego. Powstaje teraz pytanie czy każdemu różniczkowaniu możemy przyporządkować wektor styczny, tzn. czy wektory styczne zadają wszystkie różniczkowania algebry $C^\infty(M)$ o wartościach w $\mathbb{R}$ i nad ewaluacją w punkcie. Żeby się o tym przekonać będziemy potrzebować lematu o funkcjach znikających w punkcie:

Lemat 1 (O funkcjach znikających w punkcie) *Niech f będzie funkcją gładką na otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu $0 \in \mathbb{R}^n$. Niech także $f(0) = 0$. Wówczas $f(x) = x^i g_i(x)$ dla pewnych funkcji gładkich g_i .*

Dowód: Ustalmy $x \in \mathcal{O}$ i zdefiniujmy

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = f(0 + tx).$$

Odcinek I jest na tyle duży, żeby zawierać 0 i 1. Funkcja F jest gładka, gdyż funkcja f jest gładka, wiadomo także, że $F(0) = 0$. Zgodnie z podstawowym twierdzeniem rachunku różniczkowego i całkowego

$$F(1) = \int_0^1 F'(s) ds, \quad F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx) x^i.$$

Możemy więc napisać równość

$$f(x) = F(1) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx) x^i ds = x^i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx) ds = x^i g_i(x)$$

dla

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx) ds.$$

Skoro funkcja f jest gładka, to funkcje g_i także są gładkie (twierdzenia o całkach z parametrem na odcinku zwartym). $\square$

Wracamy teraz do dyskusji różniczkowań algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ względem ewaluacji w punkcie q . Korzystając z powyższego lematu oraz współrzędnych $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ w otoczeniu $\mathcal{U}$ punktu q takich, że $\varphi(q) = 0$, funkcję f w otoczeniu punktu q zapisać możemy jako

$$f(y) = f(q) + x^i(y)g_i(y), \quad y \in \mathcal{U}.$$

Sprawdzaliśmy już, że każde różniczkowanie na funkcjach stałych znika, więc

$$D(f) = D(f(q) + x^i g_i) = D(x^i g_i) = D(x^i)g(q) + x^i(q)D(g_i) = D(x^i)g_i(q)$$

Wartość różniczkowania D na funkcji f zależy więc od wartości $d^i = D(x^i)$ na funkcjach współrzędnościowych oraz wartości g_i w q . Weźmy teraz krzywą $\gamma(t) = \varphi^{-1}(d^1 t, d^2 t, \dots, d^n t)$ i sprawdźmy jakiemu różniczkowaniu odpowiada wektor styczny do tej krzywej:

$$D_{\dot{\gamma}(0)} = \frac{df \circ \gamma}{dt} = \frac{df(d^1 t, d^2 t, \dots, d^n t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) d^i.$$

Biorąc funkcję f postaci $f(q) + x^i g_i$ stwierdzamy, że $\frac{\partial f}{\partial x^i}(q) = g_i(q)$, zatem wektor styczny do γ odpowiada właśnie różniczkowaniu D . Skonstruowaliśmy zatem wzajemnie jednoznaczność odpowiednio między różniczkowaniami a wektorami stycznymi. Oznaczenie $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nabiera zatem sensu. Różniczkowanie w „kierunku współrzędnej” x^i przyporządkowuje funkcji f pochodną $\frac{\partial f}{\partial x^i}(q)$, tak samo zadziała wektor styczny do krzywej

$$t \longmapsto (x^1(q), x^2(q), \dots, x^i(q) + t, \dots, x^n(q)).$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że baza złożona z różniczkowań cząstkowych jest dualna do bazy złożonej z różniczek współrzędnych. Prawdziwy jest więc wzór na ewaluację kowektora α na wektorze v we współrzędnych

$$\langle \alpha_i dx^i, v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \alpha^i v_i.$$

Kontynuujemy badanie struktury wiązek stycznej kostycznej.

Fakt 2 *Jeśli M jest rozmaitością gładką, to TM i T^*M także są rozmaitościami gładkimi.*

Dowód: Niech $\mathcal{U} \subset M$ będzie dziedziną mapy φ . W każdym punkcie $q \in \mathcal{U}$ współrzędne (x^i) związane z mapą φ definiują bazę w przestrzeni stycznej $T_q M$. Niech $T\varphi$ oznacza odwzorowanie

$$T\varphi : \tau_M^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad T\varphi(v) = (x^1(q), \dots, x^n(q), v^1, \dots, v^n)$$

gdzie

$$q = \tau_M(v), \quad \text{ i } \quad v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Niech teraz $\mathcal{O}$ będzie dziedziną mapy ψ taką, że $\mathcal{U} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^{2n} \\ & \nearrow T\varphi & \downarrow T\psi \circ (T\varphi)^{-1} \\ \tau_M^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{O}) & & \mathbb{R}^{2n} \\ & \searrow T\psi & \end{array}$$