

Skoro funkcja f jest gładka, to funkcje g_i także są gładkie (twierdzenia o całkach z parametrem na odcinku zwartym). $\square$

Wracamy teraz do dyskusji różniczkowań algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ względem ewaluacji w punkcie q . Korzystając z powyższego lematu oraz współrzędnych $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ w otoczeniu $\mathcal{U}$ punktu q takich, że $\varphi(q) = 0$, funkcję f w otoczeniu punktu q zapisać możemy jako

$$f(y) = f(q) + x^i(y)g_i(y), \quad y \in \mathcal{U}.$$

Sprawdzaliśmy już, że każde różniczkowanie na funkcjach stałych znika, więc

$$D(f) = D(f(q) + x^i g_i) = D(x^i g_i) = D(x^i)g(q) + x^i(q)D(g_i) = D(x^i)g_i(q)$$

Wartość różniczkowania D na funkcji f zależy więc od wartości $d^i = D(x^i)$ na funkcjach współrzędnościowych oraz wartości g_i w q . Weźmy teraz krzywą $\gamma(t) = \varphi^{-1}(d^1 t, d^2 t, \dots, d^n t)$ i sprawdźmy jakiemu różniczkowaniu odpowiada wektor styczny do tej krzywej:

$$D_{\dot{\gamma}(0)} = \frac{df \circ \gamma}{dt} = \frac{df(d^1 t, d^2 t, \dots, d^n t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) d^i.$$

Biorąc funkcję f postaci $f(q) + x^i g_i$ stwierdzamy, że $\frac{\partial f}{\partial x^i}(q) = g_i(q)$, zatem wektor styczny do γ odpowiada właśnie różniczkowaniu D . Skonstruowaliśmy zatem wzajemnie jednoznaczność odpowiednio między różniczkowaniami a wektorami stycznymi. Oznaczenie $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nabiera zatem sensu. Różniczkowanie w „kierunku współrzędnej” x^i przyporządkowuje funkcji f pochodną $\frac{\partial f}{\partial x^i}(q)$, tak samo zadziała wektor styczny do krzywej

$$t \longmapsto (x^1(q), x^2(q), \dots, x^i(q) + t, \dots, x^n(q)).$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że baza złożona z różniczkowań cząstkowych jest dualna do bazy złożonej z różniczek współrzędnych. Prawdziwy jest więc wzór na ewaluację kowektora α na wektorze v we współrzędnych

$$\langle \alpha_i dx^i, v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \alpha^i v_i.$$

Kontynuujemy badanie struktury wiązek stycznej kostycznej.

Fakt 2 *Jeśli M jest rozmaitością gładką, to TM i T^*M także są rozmaitościami gładkimi.*

Dowód: Niech $\mathcal{U} \subset M$ będzie dziedziną mapy φ . W każdym punkcie $q \in \mathcal{U}$ współrzędne (x^i) związane z mapą φ definiują bazę w przestrzeni stycznej $T_q M$. Niech $T\varphi$ oznacza odwzorowanie

$$T\varphi : \tau_M^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad T\varphi(v) = (x^1(q), \dots, x^n(q), v^1, \dots, v^n)$$

gdzie

$$q = \tau_M(v), \quad \text{ i } \quad v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Niech teraz $\mathcal{O}$ będzie dziedziną mapy ψ taką, że $\mathcal{U} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^{2n} \\ & \nearrow T\varphi & \downarrow T\psi \circ (T\varphi)^{-1} \\ \tau_M^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{O}) & & \mathbb{R}^{2n} \\ & \searrow T\psi & \end{array}$$

Współrzędne związane z mapą ψ oznaczane będą (y^i) , ponadto przyjmujemy oznaczenia $(\dot{x}^i)$, $(\dot{y}^j)$ na współrzędne wektora stycznego w bazie związanej z mapą φ i ψ (odpowiednio). Wektor $T\varphi^{-1}(x^i, \dot{x}^j)$ to wektor styczny do krzywej

$$t \mapsto \varphi^{-1}(x^i + t\dot{x}^i).$$

Jego współrzędne względem $T\psi$ wyznaczymy różniczkując po t krzywą $\psi(\varphi^{-1}(x^i + t\dot{x}^i))$ w $\mathbb{R}^n$. Złożenie odwzorowań ψ i φ^{-1} zapisujemy z użyciem (x^i) i (y^j) : określa je zestaw funkcji $y^j(\varphi^{-1}(x^i))$. Różniczkujemy więc krzywą

$$t \mapsto (y^j(x^i + \dot{x}^i t))$$

otrzymując współrzędne tego samego wektora $T\varphi^{-1}(x^i, \dot{x}^j)$ w bazie związanej z ψ :

$$(y^j(x^i), \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \dot{x}^i).$$

W każdym punkcie na rozmaitości zamiana zmiennych jest realizowana poprzez liniowe odwzorowanie, którego wyrazami macierzowymi są pochodne cząstkowe $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$. Jeśli funkcje y^j zależą od x^i w sposób gładki, to także $\dot{y}^j$ zależą od x^i i $\dot{x}^i$ w sposób gładki. Zbiór par $(\tau_M^{-1}(\mathcal{O}), T\varphi)$ jest atlasem na M . Topologię na TM przeciągamy z $\mathbb{R}^{2n}$ przy pomocy odwzorowań $T\varphi$, tzn bierzemy najszlubszą topologię przez której wszystkie te odwzorowania są homeomorfizmami. Zapiszmy jeszcze macierz zamiany zmiennych

$$\begin{bmatrix} \dot{y}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{bmatrix}.$$

Bardzo podobnie postępujemy z przestrzenią kostyczną. Korzystamy z bazy dx^i aby zapisać kowektor we współrzędnych:

$$\alpha = \alpha_i dx^i.$$

Dla mapy $(\mathcal{O}, \varphi)$ definiujemy odwzorowanie

$$T^*\varphi : \pi_M^{-1}(\mathcal{O}) \longmapsto \mathbb{R}^{2n}, \quad T^*\varphi(\alpha) = (x^1(q), \dots, x^n(q), \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Oznaczmy przez (p_j) współrzędne kowektora w bazie dx^j a przez (r_j) współrzędne kowektora w bazie dy^j . Wówczas $p_i dx^i$ jest różniczką funkcji, która we współrzędnych ma postać

$$f \circ \varphi^{-1}(x^i) = p_i x^i.$$

Odwzorowanie $\varphi \circ \psi^{-1}$ określone jest przez zestaw funkcji $x^i(y^j)$, zatem $f \circ \psi^{-1}(y^j) = p_i x^i(y^j)$. Ten sam kowektor w bazie związanej z ψ to

$$p_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j, \quad \text{zatem} \quad r_j = p_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}.$$

W wersji macierzowej:

$$[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n] = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{bmatrix}$$

Zamiana zmiennych na zbiorze $\pi_M^{-1}(\mathcal{O} \cap \mathcal{U})$ także jest odwzorowaniem gładkim, zatem pary $(\pi_M^{-1}(\mathcal{U}), T^*\varphi)$ stanowią atlas na T^*M . Zwróćmy uwagę na to, że macierze zamiany zmiennych w przypadku wektorów i kowektorów są wzajemnie odwrotne. Są to macierze pochodnych odwzorowań $\psi \circ \varphi^{-1}$ i $\varphi \circ \psi^{-1}$. Obserwujemy także znane z algebry zjawisko: odwzorowanie sprzężone ma macierz transponowaną (jeśli zapisujemy kowektor jako macierz „kolumnową”. Jeśli kowektor zapisujemy jako macierz jednowierszową, wtedy odwzorowanie sprzężone reprezentuje się macierzą nietransponowaną, ale należy pamiętać co i z której strony mnożymy. $\square$

Oprócz struktury rozmaitości przestrzenie styczna i kostyczna wyposażone są w kanoniczne rzuty na M . Przeciwobraz punktu względem każdego z rzutów jest przestrzenią wektorową izomorficzną z $\mathbb{R}^n$. Skonstruowane przez nas mapy zachowują tę strukturę, tzn. $pr_1 \circ T\varphi = \varphi \circ \tau_M$ i $pr_1 \circ T^*\varphi = \varphi \circ \pi_M$. Ponadto $T\varphi$ ($T^*\varphi$) obcięte do przestrzeni stycznej (kostycznej) w jednym punkcie jest izomorfizmem liniowym, zamiana zmiennych także jest odwzorowaniem liniowym w każdej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nad ustalonym punktem $\varphi(q)$. Tego rodzaju struktura nosi nazwę wiązki wektorowej. Bardziej precyzyjnie

Definicja 11 Czwórka (E, M, ρ, F) , gdzie E i M są rozmaitościami, F przestrzenią wektorową a $\rho : E \rightarrow M$ surjektywną submersją nazywamy *wiązką wektorową* jeśli dla każdego punktu $q \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{U}$ i dyfeomorfizm $\Phi : \rho^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times F$ taki, że

$$pr_1 \circ \Phi = \rho.$$

Wymagamy ponadto, że jeśli $\mathcal{U}$ i $\mathcal{O}$ mają niepuste przecięcie to złożenie odpowiadających im odwzorowań $\Psi \circ \Phi^{-1}$ jest nad każdym punktem $q \in \mathcal{U} \cap \mathcal{O}$ izomorfizmem liniowym. Przestrzeń F nazywamy *włóknem typowym* wiązki wektorowej ρ . Każda przestrzeń $\rho^{-1}(q)$ jest przestrzenią wektorową izomorficzną (choć niekanonicznie) z F . Przestrzeń tę nazywamy *włóknem nad q* . E nazywamy *przestrzenią totalną* zaś M *bazą* wiązki.

Bez wątpliwości $(TM, M, \tau_M, \mathbb{R}^n)$ i $(T^*M, M, \pi_M, \mathbb{R}^n)$ są wiązkami wektorowymi. Mówi się o nich *wiązka styczna* i *wiązka kostyczna*. Obie wiązki mają bardzo bogatą strukturę, do której struktura rozmaitości i struktura wiązki wektorowej stanowią dopiero wstęp. Obie wiązki są niezwykle istotne w matematycznym opisie mechaniki analitycznej. Wiązka styczna reprezentuje zazwyczaj przestrzeń położeń i prędkości opisywanego układu, zaś wiązka kostyczna przestrzeń położeń i pędów.

Definicja 12 Niech teraz $F : M \longrightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Odwzorowanie

$$\mathbb{T}F : \mathbb{T}M \longrightarrow \mathbb{T}N, \quad \mathbb{T}F(\mathbf{t}\gamma(0)) = \mathbf{t}(F \circ \gamma)(0).$$

nazywamy odwzorowaniem stycznym do F .

Tym razem użyliśmy oznaczenia $\mathbf{t}\gamma(0)$ na wektor styczny do krzywej γ w punkcie 0, gdyż stawianie kropki nad złożeniem $F \circ \gamma$ jest niewygodne. Oznaczenie $\mathbf{t}\gamma(0)$ jest szczególnie przydatne, gdy krzywa definiująca wektor sama ma skomplikowaną i długą definicję. Odwzorowanie styczne obcięte do przestrzeni stycznej w jednym punkcie jest odwzorowaniem liniowym.

Niech M będzie wymiaru m a N wymiaru n . Niech także (x^i) , (y^j) będą współrzędnymi w otoczeniach punktu $q \in M$ i $F(q) \in N$. Wtedy odwzorowanie F dane jest we współrzędnych funkcjami $F^j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tzn. $y^j(F(q)) = F^j(x^i(q))$. Odwzorowanie styczne w obcięciu do $\mathbb{T}_q M$ przyjmuje wartości w $\mathbb{T}_{F(q)} N$ i jest odwzorowaniem liniowym, którego macierz w odpowiednich bazach ma postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \frac{\partial F^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x^1} & \frac{\partial F^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \frac{\partial F^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{bmatrix}.$$

Definicja 13 Odwzorowanie F definiuje także relację $\mathbb{T}^*F$ między przestrzeniami kostycznymi. Dwa kowektory $\alpha \in \mathbb{T}_q^* M$ i $\beta \in \mathbb{T}_{F(q)}^* N$ są w relacji jeśli

$$r = F(q) \quad \text{oraz} \quad \alpha = \mathbf{d}(f \circ F)(q) \quad \text{jeśli} \quad \beta = \mathbf{d}f(r).$$

Relację tę nazywamy *relacją kostyczną* do F lub *podniesieniem kostycznym* F

Relacja kostyczna nie jest odwzorowaniem. Na poziomie punktów zaczepienia „idzie” w tę samą stronę co odwzorowanie F , zaś na poziomie kowektorów w przeciwną. Relacja ta obcięta do przestrzeni $\mathbb{T}_q^* M \times \mathbb{T}_{F(q)}^* N$ jest odwzorowaniem liniowym $(\mathbb{T}F)^*$ sprzężonym do odwzorowania stycznego.

3.1 Realizacja wiązek stycznej i kostycznej rozmaitości zanurzonej.

Niech A będzie przestrzenią afiniczną. Ponieważ każda skończenie wymiarowa przestrzeń afiniczna jest także rozmaitością, to możemy rozważać przestrzeń styczną i kostyczną do niej. Możemy także pytać o przestrzenie styczne i kostyczne do powierzchni zanurzonych w A .

Niech γ będzie gładką krzywą w A . Wektor prędkości tej krzywej w punkcie $a = \gamma(0)$ to

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - a}{t}.$$

Różnica w liczniku jest elementem przestrzeni wektorowej V modelowej dla A . Wykorzystując formy liniowe na V możemy sprawdzić, że wektor ten można interpretować jako wektor styczny do A . Zbiór funkcji na A postaci $f(b) = \langle \varphi, b - a \rangle$ jest wystarczający do rozróżnienia wektorów stycznych w punkcie a . Okazuje się, że krzywa γ jest równoważna krzywej $\gamma' : t \mapsto a + tv$. Istotnie

$$\frac{df \circ \gamma}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \varphi, \gamma(t) - a \rangle}{t} = \langle \varphi, \frac{\gamma(t) - a}{t} \rangle = \langle \varphi, v \rangle$$

Z drugiej strony

$$\frac{df \circ \gamma'}{dt}(0) = \frac{df}{dt}|_{t=0} f(a + tv) = \frac{df}{dt}|_{t=0} \langle \varphi, tv \rangle = \langle \varphi, v \rangle.$$

Przestrzeń styczna do przestrzeni afinicznej w punkcie a jest więc izomorficzna z V , a cała wiązka styczna $TA = A \times V$. Korzystając z dualności przestrzeni stycznej i kostycznej w punkcie stwierdzamy, iż $T^*A = A \times V^*$. Wektory styczne do powierzchni M zanurzonej w A interpretować więc można jako podprzestrzenie przestrzeni wektorowej V - bierzemy te elementy V , które pochodzą od krzywych leżących w M . W każdym punkcie jednak otrzymujemy inną podprzestrzeń (choć oczywiście tego samego wymiaru). Jak znaleźć wektory styczne do M w punkcie a ? Jeśli M zdefiniowana jest jako poziomica zerowa odwzorowania

$$F : A \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

to złożenie każdej krzywej γ leżącej w M z F jest krzywą stałą i równą zero w $\mathbb{R}^m$. Wektory styczne należą więc do jądra pochodnej $F'(a)$:

$$T_a M = \ker F'(a).$$

Skoro $T_a M$ jest podprzestrzenią w V , to T^*M musi być przestrzenią ilorazową:

$$T_a^* M = V^* / (T_a M)^\circ.$$

Anihilator $(T_a M)^\circ$ rozpięty jest przez różniczki funkcji F^i , $i = 1 \dots m$ definiujących M .

Każda przestrzeń styczna do powierzchni zanurzonej jest podprzestrzenią w V , ale wiązka styczna jako całość nie „dziedziczy” struktury iloczynu kartezjańskiego. Np. każda z przestrzeni stycznych do sfery S^2 jest dwuwymiarową płaszczyzną zanurzoną w $\mathbb{R}^3$, jednak $TS^2 \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$. Równość zachodzi jedynie lokalnie. Gdyby wiązka styczna do sfery dwuwymiarowej była trywialna (tzn. miała strukturę iloczynu kartezjańskiego) to nieprawdziwe byłoby *Twierdzenie o zaczesaniu Borsuka*, które mówi, że nie istnieje nieznikające gładkie pole wektorowe na parzystowym wymiarowych sferach.

Użyliśmy przed chwilą niezdefiniowanego wcześniej pojęcia „gładkie pole wektorowe”. Pora naprawić ten błąd.

3.2 Pola wektorowe i formy

Definicja 14 *Cięciem (gładkim)* wiązki ρ nazywamy odwzorowanie (gładkie) $\sigma : M \rightarrow E$ o własności $\rho \circ \sigma = id_M$. Mówimy także o lokalnych cięciach zdefiniowanych jedynie na otwartym podzbiorze $\mathcal{U}$.



Rys. 22: Karol Borsuk.

Każda wiązka wektorowa ma przynajmniej jedno cięcie globalne przyporządkowujące każdemu punktowi na bazie odpowiedni wektor zerowy we włóknie. Gładkie cięcia wiązki stycznej nazywamy gładkimi *polami wektorowymi* zaś cięcia wiązki kostycznej gładkimi *jednoformami*. Pole wektorowe we współrzędnych jest postaci:

$$X = X^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + X^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n}$$

zaś jednoforma

$$\alpha = \alpha_1(x) dx^1 + \alpha_2(x) dx^2 + \cdots + \alpha_n(x) dx^n,$$

gdzie X^i i α_j są gładkimi funkcjami.

Przykładem jednoformy jest różniczka funkcji (tzn. przyporządkowanie punktowi różniczki funkcji w tym punkcie). Nie wszystkie jednak formy są tego rodzaju. Na $\mathbb{R}^2$ np łatwo wskazać (korzystając z globalnego układu współrzędnych (x, y)) formę $\alpha = x dy - y dx$, która nie jest różniczką funkcji. Gdyby tak było, tzn gdyby $\alpha = dg$, to

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \text{ale wtedy} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right).$$

Przykładem pola wektorowego jest znany pewnie wszystkim *gradient funkcji*. Załóżmy, że każda z przestrzeni $T_q M$ wyposażona jest w iloczyn skalarny, którego zależność od punktu q jest gładka. Taka sytuacja ma miejsce na przykład, gdy M jest zanurzona w $\mathbb{R}^n$ – możemy wówczas obciąć kanoniczny iloczyn skalarny z $\mathbb{R}^n$ do podprzestrzeni w każdym punkcie powierzchni. Iloczyn skalarny zadaje, jak wiadomo, izomorfizm między przestrzenią wektorową a dualną do niej:

$$G : V \ni v \longmapsto (v|\cdot) \in V^*.$$

Na rozmaitości odwzorowanie $G : TM \rightarrow T^*M$ jest izomorfizmem wiązek wektorowych nad identycznością w M , tzn diagram

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{G} & T^*M \\ \tau_M \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ M & \xrightarrow{id_M} & M \end{array}$$

jest przemienny, a G obcięte do każdego włókna jest liniowym izomorfizmem.

Definicja 15 Niech f będzie funkcją na M , wówczas

$$(\text{grad } f)(q) = G^{-1}(\text{d}f(q)).$$

Oczywiście na $M = \mathbb{R}^n$, gdzie baza kanoniczna jest ortonormalna względem iloczynu skalarnego, jako wyrażenie gradientu we współrzędnych otrzymujemy znany wzór

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots \frac{\partial f}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Wiadomo jednak, że użycie krzywoliniowego układu współrzędnych istotnie zmienia postać wzoru. Znajomość definicji gradientu (a nie tylko wyrażenia we współrzędnych kartezjańskich) znacznie ułatwia rachunki w różnych układach współrzędnych, także na $\mathbb{R}^n$.

Innym przykładem pola wektorowego jest tzw. *pole Eulera* na wiązce wektorowej. Niech $\rho : E \rightarrow M$ będzie wiązką wektorową. Przestrzeń TE styczna do E zawiera szczególne wektory, które nazywamy *pionowymi* względem ρ . Wektor $v \in TE$ jest pionowy, jeśli $T\rho(v) = 0 \in TM$. Przestrzeń składającą się z wektorów pionowych oznaczamy zazwyczaj $\forall E$. Jest to podwiązka wiązki stycznej TE , co oznacza, że $\forall E$ jest podrozmainością w TE i sama też jest wiązką wektorową nad E . Suma wektorów pionowych jest pionowa, podobnie wektor pionowy pomnożony przez liczbę jest pionowy. Wektory pionowe są styczne do włókien wiązki E , zatem styczne do przestrzeni wektorowych, którymi są te włókna. Każda przestrzeń $\forall_e E$ jest więc identyczna z $E_{\rho(e)}$. Wartością pola Eulera w punkcie e jest ten sam wektor e (ale traktowany jako pionowy wektor styczny). Inaczej mówiąc Wartością pola Eulera w punkcie $e \in E_q$ jest wektor styczny do krzywej $t \mapsto e + te$. Pole to oznaczane jest ∇_E i jest elementem struktury każdej wiązki wektorowej. Jeśli (x^i, y^a) jest układem współrzędnych na wiązce E zgodnym ze strukturą, tzn (y^i) są liniowymi współrzędnymi w każdym włóknie, to pole Eulera ma postać

$$\nabla_E(e) = y^a(e) \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Przykład 13 Rozważmy pole wektorowe X na S^2 dane we współrzędnych stereograficznych (względem bieguna północnego) wzorem

$$X = (x - y) \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Pole zdefiniowane we współrzędnych stereograficznych zadane jest jedynie na obszarze będącym dziedziną tego układu współrzędnych. Czy da się to pole rozszerzyć na całą sferę, tzn dedefiniować w biegunie północnym tak, żeby całość była polem gładkim? Żeby to sprawdzić, dokonajmy zamiany zmiennych w polu X na współrzędne sferyczne względem bieguna południowego. Nowe współrzędne to

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Zapisujemy transformację wektorów bazowych

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial}{\partial b} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial}{\partial b},$$

podobnie

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial}{\partial b} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial}{\partial b}.$$

Podstawiamy uzyskany wynik do wzoru definiującego pole wektorowe X , porządkując jednocześnie współczynniki przy wektorach bazowych w kierunku współrzędnych a i b :

$$\begin{aligned} X &= \left[(x - y) \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + (x + y) \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \frac{\partial}{\partial a} + \\ &\quad \left[(x - y) \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + (x + y) \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \frac{\partial}{\partial b} = \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ [-(x - y)^2(x + y) - 2xy(x + y)] \frac{\partial}{\partial a} + [-2xy(x - y) + (x + y)^2(x - y)] \frac{\partial}{\partial b} \right\} = \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ (x + y)(-x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial a} + (x - y)(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial b} \right\} = -(a + b) \frac{\partial}{\partial a} + (a - b) \frac{\partial}{\partial b}. \end{aligned}$$

Formalnie, opis pola X we współrzędnych (a, b) obowiązuje na sferze z wyłączeniem obu biegunów. Biegun północny nie należy do dziedziny współrzędnych (x, y) , zatem X w ogóle nie jest tam określone, zaś biegun południowy nie należy do dziedziny (a, b) , więc otrzymane z zamiany zmiennych wyrażenie w nim nie obowiązuje. Patrząc jednak na postać X we współrzędnych (a, b) widzimy, że można to pole w sposób gładki dookreślić w biegunie północnym $(a, b) = (0, 0)$ kładąc tam wartość pola równą 0. Ostatecznie więc X jest gładkim polem wektorowym zdefiniowanym na całej sferze. Na biegunach pole ma wartość 0, zaś w pozostałych punktach wyraża się jednym lub drugim wzorem w zależności od tego, jakich współrzędnych chcemy używać. To samo pole wektorowe możemy jeszcze zapisać we współrzędnych sferycznych (φ, ϑ) . Przyjmuje ono postać

$$X = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Sferyczny układ współrzędnych nie obowiązuje na obu biegunach, zatem fakt, że te współrzędne nie pozwalają przedłużyć pola na bieguny specjalnie nie dziwi.

Sprawdźmy teraz jak pola i formy zachowują się względem odwzorowań rozmaitości. Oznaczmy przez F gładkie odwzorowanie

$$F : M \longrightarrow N.$$

Wiemy już, że korzystając z odwzorowania stycznego możemy przenieść każdy wektor styczny z TM do TN . Jednak jeśli odwzorowanie nie jest iniektywne, może się zdarzyć, że obrazy dwóch różnych wektorów będących wartościami pola na M w różnych punktach mających wspólny obraz w N będą różne. Zazwyczaj nie można przenieść pola wektorowego X z rozmaitości M na rozmaitość N . Da się to jednak zrobić zawsze, gdy F jest dyfeomorfizmem. W takiej sytuacji definiujemy *transport pola wektorowego*:

$$(F_*X)(F(q)) = \mathbb{T}F(X(q)).$$

Inaczej jest z formami: formę z N zawsze można cofnąć na M korzystając z relacji $\mathbb{T}^*F$. Definiujemy zatem *cofnięcie* albo *pull-back* formy α na N pokazując jak cofnięta forma działa na wektory styczne do M :

$$\langle (F^*\alpha)(q), v \rangle = \langle \alpha, \mathbb{T}F(v) \rangle.$$

Oznaczenia F_* i F^* wskazują na zastosowanie odwzorowania stycznego i relacji kostycznej do pól wektorowych i form a nie do pojedynczych wektorów i kowektorów.

3.3 Krzywe całkowe pola wektorowego

Krzywą całkową pola wektorowego $X \in \mathcal{X}(M)$ nazywamy gładką krzywą $\gamma : I \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(t)$ taką, że

$$\forall t \in I \quad \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)),$$

czyli pole X jest styczne do krzywej i prędkość krzywej jest równa wartości pola. Zanim zagłębimy się w kwestie teoretyczne, obejrzymy przykład:

Przykład 14 Rozważmy pole wektorowe X z poprzedniego przykładu dane we współrzędnych stereograficznych (względem bieguna północnego) na sferze dwuwymiarowej wzorem

$$X = (x - y) \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Jeśli krzywa $t \mapsto (x(t), y(t))$ jest krzywą całkową pola to

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (x(t) - y(t), x(t) + y(t)).$$

Otrzymaliśmy więc układ równań różniczkowych, który do tej pory (na analizie II) zapisywany był jako

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Wyteżywszy pamięć i sięgnąwszy do zasobów wiedzy algebraicznej, bylibyśmy pewnie w stanie rozwiązać ten układ równań... Otrzymalibyśmy wówczas następującą postać rozwiązania (stosujemy wektorową notację algebraiczną, pamiętając jednak, że (x, y) są współrzędnymi na sferze).

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Powyższa krzywa przechodzi przez punkt (x_0, y_0) dla $t = 0$. Jest też oczywiście stała krzywa $(x(t) = 0, y(t) = 0)$ odpowiadająca warunkom początkowym w biegunie południowym.

Widzimy zatem, że pole wektorowe na rozmaitości zapisane w układzie współrzędnych to nic innego jak układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania takiego układu dla zadanych warunków początkowych gwarantowana jest przez twierdzenie Cauchy'ego. Zadanie warunków początkowych oznacza wybranie punktu na rozmaitości, przez który krzywa całkowa przechodzi dla parametru $t = 0$. Wiemy już więc, że krzywe całkowe istnieją, przynajmniej lokalnie. Krzywe całkowe naszego pola można też znaleźć korzystając ze współrzędnych sferycznych:

$$X = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

i rozwiązując układ równań

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\vartheta} = -\sin \vartheta.$$

Krzywa całkowa przechodząca dla $t = 0$ przez punkt (φ_0, ϑ_0) to

$$t \mapsto \gamma(t) = \left(\varphi_0 + t, 2 \arctan\left[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t\right] \right).$$

Zauważmy jaką ciekawą własność ma powyższe rozwiązanie: Zapiszmy krzywą całkową w parametrze s z warunkiem początkowym dla $s = 0$ równym $\gamma(t)$:

$$s \mapsto \left(\varphi(t) + s, 2 \arctan\left[\tan\left(\frac{\vartheta(t)}{2}\right) e^s\right] \right).$$

Ale $\varphi(t) = \varphi_0 + t$ oraz $\vartheta(t) = 2 \arctan\left[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t\right]$. W szczególności druga współrzędna to:

$$2 \arctan\left[\tan\left(2 \arctan\left[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t\right]/2\right) e^s\right] = 2 \arctan\left[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t e^s\right] = 2 \arctan\left[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^{t+s}\right]$$

Okazuje się więc, że $s \mapsto \gamma(s + t)$. Podobny wynik otrzymamy prowadząc rachunki we współrzędnych stereograficznych:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} &= e^s \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \\ &= e^{t+s} \begin{bmatrix} \cos(t+s) & -\sin(t+s) \\ \sin(t+s) & \cos(t+s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Powyższa własność jest ogólną własnością krzywych całkowych. Przesunięcie wzdłuż krzywych całkowych o t jest dyfeomorfizmem rozmaitości M :

$$\Phi_t : M \longrightarrow M$$

o własnościach

$$(1) \quad \Phi_0(q) = q, \quad (2) \quad \Phi_s(\Phi_t(q)) = \Phi_{t+s}(q).$$

Ponadto dla każdego q

$$t \mapsto \Phi_t(q)$$

jest krzywą całkową pola X . Odwzorowanie

$$\Phi : I \times M \longrightarrow M, \quad \Phi(t, q) = \Phi_t(q).$$

Nazywane jest *lokalną grupą dyfeomorfizmów* związaną z X . Określenie „grupa” odnosi się tu do własności (1) i (2).♣

3.4 Nawias Liego

Gładkie pole wektorowe definiuje różniczkowanie algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ nad identycznością jako homomorfizmem algebr. Istotnie, skoro w każdym punkcie $q \in M$ wartość $X(q)$ jest różniczkowaniem algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ o wartościach rzeczywistych, zbierając wartości różniczkowania punkt po punkcie i korzystając z gładkości jako wartość $X(f)$ otrzymujemy gładką funkcję $q \mapsto X(q)(f)$.