

3.4 Do czego służą jednoformy?

W poprzednich dwóch podrozdziałach dyskutowaliśmy pola wektorowe. Okazało się, że pole wektorowe na rozmaitości jest uogólnieniem pojęcia równania różniczkowego pierwszego rzędu, które znamy z $\mathbb{R}^n$. A jednoformy różniczkowe? Do czego mogą służyć? Wykonajmy następujący rachunek: Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ będzie gładką krzywą, zaś α będzie jednoformą na M . Zapiszmy tę krzywą i tę formę w dwóch różnych układach współrzędnych

$$\alpha = f_i(x)dx^i \quad \alpha = g_j(y)dy^j$$

Skoro oba wzory reprezentują tę samą formę, mamy związek

$$f_i(x) = g_j(y(x)) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Dla krzywej γ możemy napisać

$$\gamma(t) = (x^i(t)), \quad \gamma(t) = (y^j(t)).$$

Przyjrzyjmy się dwóm wyrażeniom:

$$\int_a^b f_i(x(t))d(x^i(t)) = \int_a^b f_i(x(t)) \frac{dx^i}{dt} dt \quad (2)$$

$$\int_a^b g_j(y(t))d(y^j(t)) = \int_a^b g_j(y(t)) \frac{dy^j}{dt} dt. \quad (3)$$

Ze względu na związek między f i g możemy w (2) dokonać zamiany f na g

$$\begin{aligned} \int_a^b f_i(x(t))d(x^i(t)) &= \int_a^b f_i(x(t)) \frac{dx^i}{dt} dt = \int_a^b g_j(y(x(t))) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dt = \\ &= \int_a^b g_j(y(t)) \frac{dy^j}{dt} dt = \int_a^b g_j(y(t))d(y^j(t)). \end{aligned}$$

Powyższy rachunek pokazuje, że wzory (2) i (3) opisują *de facto* tę samą wielkość. Ostateczna wartość nie zależy od współrzędnych jakich użyliśmy. Przyjrzyjmy się teraz drugiemu rachunkowi - zmienimy teraz parametryzację krzywej γ , zostawiając bez zmian obraz tej krzywej. Niech więc $\tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$ będzie reparametryzacją krzywej γ , tzn. $\eta : [c, d] \rightarrow M$, $\eta(\tau(t)) = \gamma(t)$. Porównajmy dwa wyrażenia:

$$\int_c^d f_i(x(\eta(\tau)))d(x^i(\eta(\tau))) = \int_c^d f_i(x(\eta(\tau))) \frac{dx^i}{d\tau} d\tau \quad (4)$$

$$\int_a^b f_i(x(\gamma(t)))d(x^i(\gamma(t))) = \int_a^b f_i(x(\gamma(t))) \frac{dx^i}{dt} dt. \quad (5)$$

Zgodnie z twierdzeniem o zamianie zmiennych w całce Riemanna mamy

$$\begin{aligned} \int_c^d f_i(x(\eta(\tau)))d(x^i(\eta(\tau))) &= \int_c^d f_i(x(\eta(\tau))) \frac{dx^i}{d\tau} d\tau = \int_c^d f_i(x(\eta(\tau(t)))) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} dt = \\ &= \int_a^b f_i(x(\gamma(t))) \frac{dx^i}{dt} dt = \int_a^b f_i(x(\gamma(t)))d(x^i(\gamma(t))). \end{aligned}$$

Okazuje się więc, że wyrażenia (4) i (5) są równe. Można więc powiedzieć, że wszystkie wyrażenia (2, 3, 4, 5) opisują tę samą wielkość, którą można nazwać całką z formy α po jednowymiarowej podrozmaitości (krzywej) będącej obrazem γ . Całkę tę obliczamy we współrzędnych i używając parametryzacji krzywej, jednak wynik nie zależy zarówno od wyboru współrzędnych jak i parametryzacji.

Oczywiście nie jest to pełna teoria całkowania form po jednowymiarowych podrozmaitościach. W szczególności nie rozważaliśmy co robić, jeśli krzywa nie mieści się w dziedzinie jednego układu współrzędnych. Pominęliśmy też kilka innych detali. Powyższe rozważania są jednak wystarczające do uzasadnienia stwierdzenia, iż *jednoformy różniczkowe służą do całkowania wzdłuż krzywych*.

Jednym ze sposobów rozpoznawania jakie narzędzie matematyczne powinno być użyte do reprezentowania danej wielkości fizycznej jest przyjrzenie się co się z tą wielkością robi. Jako przykład niech posłuży nam pojęcie siły. Siłę całkujemy wzdłuż trajektorii uzyskując pracę. W podręcznikach do mechaniki możemy znaleźć wzory podobne do $W = \int \vec{F} d\vec{s}$ lub $dW = \vec{F} d\vec{s}$, które wskazują, że być może siłę należałoby reprezentować raczej kowektorem niż wektorem. W teorii zwanej mechaniką analityczną tak się właśnie robi.

3.5 Nawias Liego

Gładkie pole wektorowe definiuje różniczkowanie algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ nad identycznością jako homomorfizmem algebr. Istotnie, skoro w każdym punkcie $q \in M$ wartość $X(q)$ jest różniczkowaniem algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ o wartościach rzeczywistych, zbierając wartości różniczkowania punkt po punkcie i korzystając z gładkości jako wartość $X(f)$ otrzymujemy gładką funkcję $q \mapsto X(q)(f)$. Reguła Leibniza jest spełniona, gdyż jest spełniona dla $X(q)$. Można pokazać (czego nie będziemy robić), że pola wektorowe to wszystkie różniczkowania algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ nad identycznością. W zbiorze różniczkowań algebry nad identycznością określony jest komutator różniczkowań. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że $[D_1, D_2]$ określone wzorem

$$[D_1, D_2](a) = D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))$$

jest różniczkowaniem. Istotnie

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](ab) &= D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) = D_1(aD_2(b) + D_2(a)b) - D_2(aD_1(b) + D_1(a)b) = \\ &= aD_1(D_2(b)) + D_1(a)D_2(b) + D_1(D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) - \\ &= aD_2(D_1(b)) - D_2(a)D_1(b) - D_2(D_1(a))b - D_1(a)D_2(b) = \end{aligned}$$

Jednokolorowe wyrażenia się upraszczają i otrzymujemy

$$\begin{aligned} &= aD_1(D_2(b)) + D_1(D_2(a))b + aD_2(D_1(b)) - D_2(D_1(a))b = \\ &= a[D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b))] + [D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))]b = \\ &= a[D_1, D_2](b) + [D_1, D_2](a)b \end{aligned}$$

Skoro komutator różniczkowań jest różniczkowaniem, a wszystkie różniczkowania to pola wektorowe, to komutator pól wektorowych także jest polem wektorowym. Komutator w zastosowaniu do pól wektorowych nazywany jest *nawiasem Liego*. Jest to odwzorowanie

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

antysymetryczne (tzn. $[X, Y] = -[Y, X]$), spełniające następujące warunki:

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$$

oraz

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Druga z równości nazywana jest *tożsamością Jacobiego*. Mówi ona, że odwzorowanie

$$[X, \cdot] : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

samo jest różniczkowaniem algebry $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$. Algebra ta jest algebrą nieprzemianną (antysymetryczną), bez jedynki i bez łączności. Algebra z antysymetrycznym działaniem spełniającym tożsamość Jacobiego nazywa się *algebrą Liego*. Pierwszą równość sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem na współrzędnych. Tożsamość Jacobiego jest charakterystyczna dla komutatora różniczkowań i także może zostać sprawdzona bezpośrednim, trochę nudnym rachunkiem.

Zapiszmy nawias pól wektorowych we współrzędnych:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}, \\ [X, Y]^j &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Postać nawiasu pól wektorowych we współrzędnych niewiele mówi o jego geometrycznej interpretacji. Wdalszym ciągu wykładu okaże się, że ta wielkość pojawia się w różnych kontekstach wielokrotnie: jest we wzorze Cartana na różniczkę formy, jest we wzorze na pochodną Liego pola wektorowego, jest w końcu we wzorze na krzywiznę koneksji. Zaczniemy jednak od prostej interpretacji w terminach krzywych całkowych pól wektorowych. Jako komutator pól wektorowych, nawias Liego mierzy różnicę w działaniu dwóch pól zastosowanych w wyjściowej i odwrotnej kolejności. Wiemy, że działanie pola wektorowego na funkcję polega na różniczkowaniu wzdłuż krzywych całkowych pola. Przeanalizujemy zatem różnicę między $\varphi(t, \psi(t, q))$ i $\psi(t, \varphi(t, q))$, gdzie φ i ψ są lokalnymi grupami dyfeomorfizmów odpowiadającymi polom wektorowym X i Y odpowiednio. Pewną techniczną trudność stanowi „zmierzenie” różnicy między dwoma punktami na rozmaitości bez dodatkowej struktury, w szczególności bez pojęcia odległości. Poradzimy sobie biorąc dowolną funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i wyznaczając

$$f(\psi(t, \varphi(t, q))) - f(\varphi(t, \psi(t, q))).$$