

antysymetryczne (tzn. $[X, Y] = -[Y, X]$), spełniające następujące warunki:

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$$

oraz

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Druga z równości nazywana jest *tożsamością Jacobiego*. Mówi ona, że odwzorowanie

$$[X, \cdot] : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

samo jest różniczkowaniem algebry $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$. Algebra ta jest algebrą nieprzemianną (antysymetryczną), bez jedynki i bez łączności. Algebra z antysymetrycznym działaniem spełniającym tożsamość Jacobiego nazywa się *algebrą Liego*. Pierwszą równość sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem na współrzędnych. Tożsamość Jacobiego jest charakterystyczna dla komutatora różniczkowań i także może zostać sprawdzona bezpośrednim, trochę nudnym rachunkiem.

Zapiszmy nawias pól wektorowych we współrzędnych:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}, \\ [X, Y]^j &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Postać nawiasu pól wektorowych we współrzędnych niewiele mówi o jego geometrycznej interpretacji. Wdalszym ciągu wykładu okaże się, że ta wielkość pojawia się w różnych kontekstach wielokrotnie: jest we wzorze Cartana na różniczkę formy, jest we wzorze na pochodną Liego pola wektorowego, jest w końcu we wzorze na krzywiznę koneksji. Zaczniemy jednak od prostej interpretacji w terminach krzywych całkowych pól wektorowych. Jako komutator pól wektorowych, nawias Liego mierzy różnicę w działaniu dwóch pól zastosowanych w wyjściowej i odwrotnej kolejności. Wiemy, że działanie pola wektorowego na funkcję polega na różniczkowaniu wzdłuż krzywych całkowych pola. Przeanalizujemy zatem różnicę między $\varphi(t, \psi(t, q))$ i $\psi(t, \varphi(t, q))$, gdzie φ i ψ są lokalnymi grupami dyfeomorfizmów odpowiadającymi polom wektorowym X i Y odpowiednio. Pewną techniczną trudność stanowi „zmierzenie” różnicy między dwoma punktami na rozmaitości bez dodatkowej struktury, w szczególności bez pojęcia odległości. Poradzimy sobie biorąc dowolną funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i wyznaczając

$$f(\psi(t, \varphi(t, q))) - f(\varphi(t, \psi(t, q))).$$

Dla ustalonego q i ustalonej funkcji f różnica ta jest gładką rzeczywistą funkcją rzeczywistego argumentu. Jej definicja jest niezależna od współrzędnych, ma więc charakter geometryczny. Współczynniki rozwinięcia Taylora tej funkcji także mają znaczenie geometryczne. Wyznamy te współczynniki korzystając ze współrzędnych. Wynik powinien zależeć jedynie od f , q , X i Y . Oznaczmy

$$\varphi^i(t, q) := x^i(\varphi(t, q)), \quad \psi^i(t, q) := x^i(\psi(t, q)).$$

We współrzędnych wielkość $f(\psi(t, \varphi(t, q))) - f(\varphi(t, \psi(t, q)))$ przyjmuje postać

$$f(\psi^i(t, \varphi^j(t, q))) - f(\varphi^i(t, \psi^j(t, q))). \quad (6)$$

Wartość w $t = 0$ jest 0, gdyż $\varphi(0, q) = \psi(0, q) = q$. Liczymy pierwszą pochodną po t . Ponieważ wyrażenie jest antysymetryczne ze względu na zamianę X i Y , skoncentrujemy się na jednym członie $f(\psi^i(t, \varphi^j(t, q)))$, drugi dopiszemy później korzystając z antysymetrii:

$$\frac{d}{dt} f(\psi^i(t, \varphi^j(t, q))) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t, \varphi^j(t, q))) \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial t}(t, \varphi^j(t, q)) + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t, \varphi^j(t, q)) \frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t, q) \right) \quad (7)$$

Przy wszystkich funkcjach w powyższym wzorze wypisywaliśmy wszystkie argumenty, żeby teraz nie mieć wątpliwości co do wyniku, kiedy wstawimy wartość $t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t, \varphi^j(t, q)))|_{t=0} &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(q), \\ \frac{\partial \psi^i}{\partial t}(t, \varphi^j(t, q))|_{t=0} &= \frac{\partial \psi^i}{\partial t}(0, q) = Y^i(q), \\ \frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t, q)|_{t=0} &= X^j(q). \end{aligned}$$

Nieco trudniejszy jest człon w kolorze czerwonym. Sięgając do definicji różniczkowania cząstkowego, które polega na różniczkowaniu wzdłuż jednej zmiennej przy ustalonych pozostałych, stwierdzamy, że wyznaczając wartość wyrażenia czerwonego należy najpierw położyć $t = 0$ w pierwszym argumencie (i pozostałych poza j -tą współrzędną x) i dopiero potem różniczkować. Wstawienie wartości 0 w miejscu pierwszego t oznacza, że różniczkujemy odwzorowanie $\psi(0, \cdot)$, które jest identycznością na M .

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t, \varphi^j(t, q))|_{t=0} = \delta_j^i$$

Podsumowując,

$$\frac{d}{dt} f(\psi^i(t, \varphi^j(t, q)))|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) (Y^i(q) + \delta_j^i X^j(q)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) (Y^i(q) + X^i(q)).$$

Wyrażenie to jest symetryczne ze względu na zamianę X na Y , co oznacza, że współczynnik przy t w pierwszej potęgce w rozwinięciu wyrażenia (6) jest 0.

Przechodzimy do wyznaczania współczynnika przy t^2 . W tym celu policzymy pochodną po t wyrażenia (7). Dla skrócenia napisów oznaczmy przez $A^i(t)$ wyrażenie występujące w nawiasie po prawej stronie we wzorze (7). Wiadomo, że $A^i(0) = Y^i(q) + X^i(q)$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f(\psi^i(t, \varphi^j(t, q))) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t, \varphi^j(t, q))) A^i(t) \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(\psi^i(t, \varphi^j(t, q))) A^k(t) A^i(t) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t, \varphi^j(t, q))) \frac{d}{dt} A^i(t). \end{aligned}$$

Część niebieska dla $t = 0$ przyjmuje postać

$$\frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(\psi^i(t, \varphi^l(t, q))) A^k(t) A^i(t)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(q) A^k(0) A^i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(q) (Y^k(q) + X^k(q)) (Y^i(q) + X^i(q)),$$

trudność polega więc na wyznaczeniu wartości wyrażenia czerwonego.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A^i(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial t}(t, \varphi^l(t, q)) + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t, \varphi^l(t, q)) \frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t, q) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(t, \varphi^l(t, q)) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^k \partial t}(t, \varphi^l(t, q)) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t}(t, q) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t \partial x^j}(t, \varphi^l(t, q)) \frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t, q) + \\ &+ \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^k \partial x^j}(t, \varphi^l(t, q)) \frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t, q) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t}(t, q) + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t, \varphi^l(t, q)) \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial t^2}(t, q). \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach wstawiamy $t = 0$ i otrzymujemy dla części czerwonej

$$\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(t, \varphi^i(t, q))|_{t=0} = \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0, q).$$

Części niebieska i zielona są równe, jeśli weźmiemy pod uwagę symetrię drugich pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^k \partial t}(t, \varphi^i(t, q)) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t}(t, q)|_{t=0} = X^k(q) \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q).$$

Część szara znika, gdyż znika druga pochodna identyczności. Obliczając wartość części czarnej także bierzemy pod uwagę, że $\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t, \varphi^i(t, q))|_{t=0} = \delta_j^i$ i otrzymujemy

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t, \varphi^i(t, q)) \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial t^2}(t, q)|_{t=0} = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0, q).$$

Podsumowując

$$\frac{d}{dt} A^i(t)|_{t=0} = \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0, q) + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0, q) + 2X^k(q) \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q).$$

Podwojony współczynnik przy t^2 otrzymujemy antysymetryzując:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} [f(\psi^i(t, \varphi^i(t, q))) - f(\varphi^i(t, \psi^i(t, q)))]_{t=0} &= \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}(q) (Y^k(q) + X^k(q)) (Y^i(q) + X^i(q)) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0, q) + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0, q) + 2X^k(q) \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q) \right) - \\ &- \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k}(q) (X^k(q) + Y^k(q)) (X^i(q) + Y^i(q)) - \\ &- \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0, q) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0, q) + 2Y^k(q) \frac{\partial X^i}{\partial x^k}(q) \right) \end{aligned}$$

Czerwone, niebieskie i zielone składniki się upraszczają pozostawiając

$$\frac{d^2}{dt^2} [f(\psi^i(t, \varphi^i(t, q))) - f(\varphi^i(t, \psi^i(t, q)))]_{t=0} = 2 \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(X^k(q) \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q) - Y^k(q) \frac{\partial X^i}{\partial x^k}(q) \right)$$

Wyrażenie w nawiasie okrągłym jest i -tą współrzędną $[X, Y]$. Rozwinięcie do wyrazów kwadratowych różnicy $f(\psi(t, \varphi(t, q))) - f(\varphi(t, \psi(t, q)))$ przyjmuje więc postać

$$f(\psi(t, \varphi(t, q))) - f(\varphi(t, \psi(t, q))) = t^2([X, Y]f)(q) + \mathcal{O}(t^3).$$

Wyrażenie $([X, Y]f)(q)$ to działanie pola wektorowego $[X, Y]$ na funkcję f obliczone w punkcie q . Tak jak się spodziewaliśmy, wynik nie zależy od współrzędnych w których prowadziliśmy rachunki.

Powyższy rachunek daje geometryczną interpretację nawiasu pól wektorowych. Nawias ten jest miarą niedokładności, jaką otrzymujemy zamieniając kolejność „podróżowania” wzdłuż krzywych całkowych obu pól wektorowych. Niedokładność tę widać dopiero w drugim rzędzie względem parametru krzywych całkowych.

Wiadomo, że dla każdego pola wektorowego X można dobrać układ współrzędnych w taki sposób, że krzywe całkowe tego pola są liniami współrzędnościowymi jednej ze współrzędnych. Rachunek, który właśnie przeprowadziliśmy pokazuje, że dla dwóch pól wektorowych może to być niemożliwe. Przeszkodą jest z całą pewnością nieznikający komutator tych pól wektorowych. Oczywiście udowodnienie, że gdy pola wektorowe komutują, odpowiedni układ współrzędnych istnieje, to oddzielny problem, który poruszony jest w dowodzie Twierdzenia Frobeniusa w późniejszych rozdziałach. W szczególności, istnienie takiego układu współrzędnych oznacza, że znika nie tylko współczynnik przy t^2 w rozwinięciu badanej przez nas funkcji, ale wszystkie współczynniki. Tak istotnie jest - pozostałe współczynniki wyrażają się przez nawias $[X, Y]$ oraz jego wielokrotne iteracje: $[X, [X, Y]]$, $[Y, [X, [X, Y]]]$ itd. Jeśli więc $[X, Y]$ znika, znikają też wszystkie inne współczynniki. Zainteresowani konkretną postacią rozwinięcia powinni poszukać informacji związanych ze wzorem Campbell’a-Baker’a-Hausdorffa.

3.6 Czy przyspieszenie jest wektorem?

Ucząc się fizyki w szkole średniej czy też mechaniki klasycznej w czasie wykładów uniwersyteckich, posługujemy się często pojęciem „wektor przyspieszenia”. Czy jednak przyspieszenie na pewno jest wektorem? Dotychczasowe doświadczenia z tego kursu geometrii różniczkowej wskazują, że warto dobrze przemyśleć jakie byty matematyczne powinny reprezentować różne wielkości fizyczne.

Rozważania będziemy prowadzić przy założeniu, że pracujemy w ramach mechaniki klasycznej, nierelatywistycznej. Przestrzeń położenia układu klasycznego zazwyczaj jest rozmaitością. Oznaczmy ją M . Na przykład jeśli analizujemy ruch monety toczącej się prostopadłe po stole, położenie monety określamy podając położenie punktu styczności ze stołem $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$, położenie monety względem osi przechodzącej przez środek monety prostopadłe do płaszczyzny monety $(S^1, \text{współrzędna } \varphi)$ i położenie względem osi obrotu prostopadłej do stołu i przechodzącej przez środek monety $(S^1, \text{współrzędna } \theta)$. Przestrzeń położenia zatem to $M = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$, a we współrzędnych czwórka (x, y, φ, θ) . Kiedy natomiast rozważamy ruch bryły sztywnej i oprócz położenia środka masy $(\mathbb{R}^3)$ uwzględniamy obroty bryły w przestrzeni, jako rozmaitość

położeń otrzymujemy $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. $SO(3)$ jest grupą Liego obrotów w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jeśli chcemy być bardzo precyzyjni, zamiast $SO(3)$ powinniśmy wziąć przestrzeń jednorodną względem tej grupy, tzn. coś jak grupa, tylko bez wyróżnionej jedynek. Relacja przestrzeni jednorodnej i grupy Liego jest taka jak przestrzeni afinicznej i modelowej wektorowej.

Prędkość układu fizycznego, którego rozmaitością położeń jest M , jest wektorem stycznym do krzywej opisującej ruch tego układu. Prędkość jest więc elementem TM . Prędkość możemy obliczyć w każdym punkcie trajektorii otrzymując krzywą w TM . Jeśli w M wybrane są współrzędne (x^i) , to trajektorię opisujemy we współrzędnych jako $t \mapsto (x^i(t))$ a prędkość jako $t \mapsto (\dot{x}^i(t), \dot{x}^j(t))$. Zauważmy tutaj, że sam zestaw funkcji $t \mapsto (\dot{x}^i(t))$ nie ma sensu geometrycznego. Prędkości nie można rozpatrywać w oderwaniu od punktu zaczepienia, przynajmniej nie na ogólnej rozmaitości. Można to robić jedynie gdy wiązka styczna do rozmaitości położeń jest trywialna i przestrzenie styczne w różnych punktach są kanonicznie utożsamiane.

Przyspieszenie mierzyć ma zmianę prędkości. Najprościej zatem jako przyspieszenie wziąć wektor styczny do krzywej prędkości w TM , czyli element TTM . Ponieważ jednak krzywa prędkości nie jest byle jaka, tylko jest podniesieniem stycznym krzywej z rozmaitości, to także wartości przyspieszenia w TTM nie są dowolne. We współrzędnych na TTM dostaniemy $(x^i(t), \dot{x}^j(t), \ddot{x}^k(t))$, to znaczy drugi i trzeci zestaw współrzędnych jest jednakowy. Elementy TTM mające taką własność odpowiadają klasom równoważności krzywych z dokładnością do drugich pochodnych. Dokładniej mówiąc, w zbiorze gładkich krzywych definiujemy relację równoważności

$$\gamma \sim \gamma' \iff \gamma(0) = \gamma'(0),$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad \frac{df \circ \gamma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{df \circ \gamma'}{dt} \Big|_{t=0}, \quad \frac{d^2 f \circ \gamma}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{d^2 f \circ \gamma'}{dt^2} \Big|_{t=0}.$$

Część niebieska definiuje wektor styczny czyli prędkość, ale jest jeszcze nowa część czerwona. Zbiór klas równoważności względem powyższej relacji oznaczamy T^2M . Jest to rozmaitość, mająca naturalny rzut na TM . Istnieje też kanoniczne zanurzenie T^2M w TTM . Przyspieszenie traktować można zatem jako element T^2M lub jako odpowiadający mu element TTM . Jak to więc w końcu jest? Czy przyspieszenie jest wektorem?

Popatrzmy na opis elementu T^2M we współrzędnych oraz na to, jak transformują się te współrzędne gdy zmienimy współrzędne na bazie. Niech więc (x^i) będzie układem współrzędnych w M . Krzywą zapisujemy we współrzędnych jako $t \mapsto (x^i(t))$. Każdą z funkcji $t \mapsto x^i(t)$ możemy rozwinąć w szereg Taylora

$$x^i(t) = x^i(0) + t\dot{x}^i(0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{x}^i(0) + \dots$$

Krzywe są równoważne, jeśli mają te same wartości $x^i(0)$, $\dot{x}^i(0)$ i $\ddot{x}^i(0)$. Współrzędne $(x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i)$ dobrze opisują element T^2M . Przeprowadzimy teraz zamianę zmiennych. Weźmy nowy układ współrzędnych (y^k) na M . Współrzędne y^k wyrazimy jako funkcje od x , wtedy

$$\dot{y}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \dot{x}^j, \quad \ddot{y}^k = \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^j \partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^i + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \ddot{x}^i.$$

Współrzędne z jedną kropką transformują się jak współrzędne wektora stycznego, a więc liniowo, podczas gdy współrzędne z dwiema kropkami transformują się afinicznie. Wiązka $T^2M \rightarrow$

TM jest wiązką afiniczną a nie wektorową. Wiązka $T^2M \rightarrow M$ ma strukturę jeszcze bardziej złożoną, zwaną wiązką gradowaną. Z tego punktu widzenia, przyspieszenie jako element T^2M nie jest wektorem, bowiem nie transformuje się liniowo. Używając zanurzenia $T^2M \hookrightarrow TTM$ moglibyśmy powiedzieć, że przyspieszenie jest wektorem stycznym, ale nie do M a do TM .

Czy zatem wszystkie rachunki zakładające, że przyspieszenie jest wektorem stycznym do M są fałszywe? Rzecz w tym, że rozmaitość konfiguracyjna niemal nigdy nie jest „gołą rozmaitością” bez dodatkowej struktury. Jeśli potrafimy napisać lagranżjan na TM lub hamiltonian na T^*M , to mamy najprawdopodobniej do czynienia z rozmaitością z metryką. Często jest to po prostu afiniczna przestrzeń euklidesowa. Wiązka styczna do afinicznej przestrzeni euklidesowej E jest trywialna, mamy $TE = E \times V$, gdzie V jest wektorową przestrzenią modelową z iloczynem skalarnym. Iterowana wiązka styczna TTE też jest trywialna: można zapisać $TTE = E \times V \times V \times \color{red}{V}$. Przyspieszenie rozumiane jako wektor mierzący zmianę prędkości, leży w czerwonym czynniku. Istotnie, biorąc krzywą w E w postaci $t \mapsto \gamma(t) \in E$ możemy wziąć wektor styczny $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in E \times V$. Część $\dot{\gamma}(t)$ jest krzywą w V i może zostać oddzielona od punktu zaczepienia w E . Biorąc wektor styczny do krzywej w TE dostajemy

$$(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) \in E \times V \times V \times \color{red}{V}$$

i znowu czerwona część ma samodzielny byt jako element V . No a co z trudnościami z transformacją współrzędnych? Tych trudności nie ma, jeśli używamy współrzędnych dostosowanych do struktury przestrzeni, czyli afinicznych. Jeśli oba zestawy współrzędnych są afiniczne, wtedy zamiana zmiennych jest także funkcją afiniczną i drugie pochodne jednych zmiennych po drugich znikają. Transformacja zmiennych z dwoma kropkami jest więc liniowa. Jeśli jednak używamy współrzędnych krzywoliniowych, w wyrażeniach na przyspieszenie pojawiają się skomplikowane wzory zawierające pierwsze i drugie pochodne współrzędnych, co wskazuje, że przyspieszenie takim zwykłym wektorem stycznym nie jest.

Żeby zauważyć komplikacje nie trzeba nawet samodzielnie przeprowadzać zamiany zmiennych. Wystarczy zajrzeć do podręcznika i sprawdzić jak wyglądają prędkość i przyspieszenie na płaszczyźnie (euklidesowej) zapisane w biegunowym układzie współrzędnych. Wektor prędkości ma składowe w bazie współrzędnościowej wyglądające „przyjaźnie” – pochodne po czasie współrzędnych położenia. Dodatkowy czynnik r przy $\dot{\varphi}$ w rozkładzie w bazie ortonormalnej wynika z warunku, że wektory bazowe mają mieć długość 1. Wektor przyspieszenia jednak ma postać dość złożoną. Charakterystyczne jest jednak, że obie współrzędne są rzędu 2 jeśli uznamy drugie pochodne za współrzędne rzędu 2 a pierwsze rzędu 1. Pierwsze pochodne pojawiają się zawsze w wyrażeniach mających łączny rząd 2. Jest to odbicie gradowanej struktury T^2M :

położenie: (r, φ) ,

prędkość: $\dot{r}\partial_r + \dot{\varphi}\partial_\varphi = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$,

przyspieszenie: $(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\partial_r + (\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r})\partial_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$,

W powyższych wzorach $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ są wersorami (wektorami bazowymi o długości 1) w kierunkach ∂_r i ∂_φ .

Jeśli nie pracujemy na przestrzeni euklidesowej, tylko np na $SO(3)$ jak w przypadku bryły sztywnej, do dyspozycji mamy metrykę i odpowiadającą jej koneksję, która także pozwala „oddzielić” przyspieszenie od prędkości i położenia. O tym jednak porozmawiamy później, kiedy pojęcie koneksji zostanie zdefiniowane.

4 Wielokowektory i wieloformy na rozmaitości

4.1 Odwzorowania wieloliniowe antysymetryczne na przestrzeni wektorowej wymiaru skończonego

Poniższe notatki powstały z użyciem notatek do wykładów *Matematyka II* i *Matematyka III*, więc mogą Państwo mieć czasami wrażenie, że autor niepotrzebnie rozdziela włos na czworo. Z drugiej strony jednak „wykładanie kawy na ławę” ma też swoje zalety...

Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. Funkcję k -liniową na przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie:

$$\omega : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_k \longrightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla każdego i , dowolnych wektorów v_j , $j = 1 \dots k$, v'_i i dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\omega(v_1, v_2, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_k) = \lambda \omega(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k) + \mu \omega(v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_k)$$

Z kursu algebry i analizy znają państwo dobrze funkcje dwuliniowe, szczególnie dwuliniowe symetryczne (np. iloczyn skalarny, druga pochodna funkcji wielu zmiennych obliczona w ustalonym punkcie, tensor bezwładności ciała sztywnego).

Wśród wszystkich funkcji k -liniowych wyróżnimy teraz szczególnie funkcje *antysymetryczne*, to znaczy mające własność

$$\omega(v_1, v_2, \dots, \textcolor{red}{v}_i, \dots, \textcolor{blue}{v}_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, v_2, \dots, \textcolor{blue}{v}_j, \dots, \textcolor{red}{v}_i, \dots, v_k) \quad (8)$$

dla dowolnych $i \neq j$. Funkcje k -liniowe antysymetryczne nazywane są też *k -kowektorami*, lub czasem *k -formami antysymetrycznymi*. Zwłaszcza w kontekście geometrii różniczkowej warto używać nazwy *k -kowektory*, nazwę *k -formy* rezerwując dla czegoś nieco innego. Mało komu jednak udaje się być w tej sprawie całkowicie konsekwentnym.

Omawiając odwzorowania liniowe i funkcje dwuliniowe stwierdziliśmy, że własność liniowości powoduje, że odwzorowanie jest jednoznacznie określone przez wartości na wektorach bazowych. Stąd na przestrzeni n -wymiarowej do zdefiniowania funkcji dwuliniowej potrzeba n^2 liczb:

$$Q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_{ij} = Q(e_i, e_j).$$

Jeśli wiadomo, że funkcja jest symetryczna, wtedy wystarczy $n(n+1)/2$ wartości. Jeśli funkcja jest antysymetryczna, potrzeba jeszcze mniej $n(n-1)/2$, gdyż wyrazy diagonalne Q_{ii} muszą być zero: z warunku antysymetrii wynika, że dla dowolnego $v \in V$

$$Q(\textcolor{red}{v}, \textcolor{blue}{v}) = -Q(\textcolor{blue}{v}, \textcolor{red}{v})$$

Po opuszczeniu kolorów (w końcu $\textcolor{red}{v}$ i $\textcolor{blue}{v}$ to ostatecznie ten sam wektor v) dostajemy

$$Q(v, v) = -Q(v, v), \quad (9)$$

czyli $Q(v, v) = 0$. Innymi słowy, przestrzeń wektorowa wszystkich funkcji dwuliniowych ma wymiar n^2 a podprzestrzeń funkcji symetrycznych i antysymetrycznych wymiary odpowiednio $n(n+1)/2$ i $n(n-1)/2$. Jeśli zauważymy ponadto, że odwzorowanie, które jest jednocześnie symetryczne i antysymetryczne musi być zerowe, oraz że

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = n^2$$

zrozumiemy, że przestrzeń wszystkich funkcji dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni odwzorowań symetrycznych i podprzestrzeni odwzorowań antysymetrycznych. Każda funkcja dwuliniowa da się więc rozłożyć w sposób jednoznaczny na część symetryczną i antysymetryczną:

$$Q(v, w) = Q_-(v, w) + Q_+(v, w)$$

$$Q_-(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) - Q(w, v)], \quad Q_+(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) + Q(w, v)].$$

Dla $k > 2$ także jest prawdą, że funkcja k -liniowa jest jednoznacznie określona przez wartości na bazie, zatem przestrzeń takich odwzorowań jest przestrzenią wektorową wymiaru n^k . W tej przestrzeni są także wyróżnione podprzestrzenie funkcji symetrycznych i antysymetrycznych, których częścią wspólną jest przestrzeń zerowa, ale podprzestrzenie te nie wyczerpują przestrzeni wszystkich funkcji. Zastanówmy się nad wymiarem przestrzeni funkcji antysymetrycznych, czyli k -kovektorów. Niech ω oznacza k -kovektor. W zbiorze n^k liczb

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

jest wiele zer. Wystarczy, że w układzie $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ którykolwiek wektor bazowy powtarza się, a już wartość ω na tym układzie musi być równa zero jak w (9). Jeśli zaś układ $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ nie zawiera powtarzających się wektorów, to wartość ω na tym układzie różni się od wartości ω na układzie zawierającym te same wektory tylko uporządkowane rosnąco ze względu na indeks, tylko znakiem. **Wniosek:** do zdefiniowania k -kovektora wystarczy tyle liczb ile jest różnych podzbiorów k -elementowych w zbiorze n -elementowym. Z kombinatoryki wiadmo, że jest ich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Powyższe rozważania prowadzą także do wniosku, że przestrzeń k -kovektorów dla $k > n$ jest zerowa, natomiast przestrzeń n -kovektorów ma wymiar równy 1. Znamy już przynajmniej jeden przykład n -kovektora: Jeśli kolumny macierzy potraktujemy jak elementy $\mathbb{R}^n$, wyznacznik jest n -kovektorem na $\mathbb{R}^n$.

Podprzestrzeń k -kovektorów na V , w kontekście geometrii różniczkowej, oznaczamy

$$\bigwedge^k V^*$$

Sensowność tego oznaczenia będzie jasna wkrótce. Podsumujmy własności k -kovektorów:

- Jeśli wśród argumentów k -kovektora α którykolwiek z wektorów powtarza się, wartość α na tym układzie wektorów jest równa zero. Wynika z tego, że

- jeśli $v_1, v_2, \dots, v_k$ jest układem liniowo-zależnym to $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$.
- Jak każde odwzorowanie liniowe α jest jednoznacznie określone na wektorach bazowych. Jeśli $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ jest bazą w V to liczby

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} = \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}), \quad 0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k < n + 1$$

wyznaczają jednoznacznie odwzorowanie α . Wynika z tego, że

$$\bullet \dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Skoro znamy już wymiar przestrzeni k -kovektorów, przydałby nam się także jakaś wygodna baza. Jako narzędzie do konstrukcji takiej bazy posłużą następujące pojęcie:

Definicja 16 *Iloczynem zewnętrznym* k -kovektora α i l -kovektora β jest $(k+l)$ -kovektor zadany wzorem

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(k+2)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Zanim zastanowimy się nad własnościami iloczynu zewnętrznego przyjrzyjmy się przykładom dla konkretnych (niedużych) k i l . Niech $k = 1$ i $l = 1$, czyli α, β są po prostu kovektorami na V . Wtedy $\alpha \wedge \beta$ jest 2-kovektorem określonym wzorem

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \frac{\text{sgn } \sigma}{1!1!} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}).$$

W grupie permutacji S_2 są tylko dwie permutacje: identyczność (parzysta) i jedna transpozycja $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (nieparzysta). Wzór przyjmuje więc postać

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1).$$

Teraz załóżmy, że α jest 2-kovektorem a β kovektorem. Potrzebujemy więc permutacji z S_3 . W tej grupie jest sześć permutacji: trzy transpozycje $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (nieparzyste), dwa cykle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i identyczność. Wzór na iloczyn zewnętrzny przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2!1!} (&+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) - \alpha(v_3, v_2)\beta(v_1) \\ &+\alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)) = \end{aligned}$$

Wyrazy zaznaczone tym samym kolorem różnią się jedynie kolejnością argumentów 2-kovektora α . Po uporządkowaniu można je dodać. Trzeba jedynie pamiętać o zmianie znaku przy zamianie kolejności argumentów:

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2!1!} (&+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) + \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) \\ &+\alpha(v_2, v_3)\beta(v_1) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)) = \\ = \frac{1}{2} (&+2\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - 2\alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + 2\alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)) = \\ &\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1). \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1).$$

Jako ostatniej przyjrzymy się sytuacji kiedy oba czynniki iloczynu zewnętrznego są 2-kowektorami. Potrzebujemy teraz permutacji z S_4 . Poprzedni przykład pokazuje, że istotny jest jedynie podział argumentów między czynniki. Argumenty jednego 2-kowektora porządkujemy rosnąco dodając podobne składniki. W tym przypadku mamy sześć możliwych podziałów zbioru indeksów $\{1, 2, 3, 4\}$ pomiędzy 2-kowektory α i β :

$$\begin{aligned}\{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 3\} \cup \{2, 4\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{2, 3\} \cup \{1, 4\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{2, 4\} \cup \{1, 3\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{3, 4\} \cup \{1, 2\}.\end{aligned}$$

Argumenty z indeksami z pierwszego zbioru będziemy wstawiać do α a z drugiego do β . Pierwszemu z podziałów odpowiadają cztery możliwe permutacje:

$$\text{id}, \quad (1\ 2), \quad (3\ 4), \quad (1\ 2)(3\ 4)$$

Pierwsza i ostatnia są parzyste, druga i trzecia nieparzyste. Permutacje te mieszają indeksy w ramach podziału, a nie między zbiorami podziału. Wkład od tych czterech permutacji do wzoru na iloczyn $\alpha \wedge \beta$ jest następujący

$$+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_1, v_2)\beta(v_4, v_3) + \alpha(v_2, v_1)\beta(v_4, v_3)$$

Po uporządkowaniu rosnąco argumentów obu 2-kowektorów otrzymujemy wkład

$$+4\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4).$$

Podobnie analizując każdy z możliwych podziałów i odpowiadające każdemu cztery permutacje dostaniemy wzór

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \frac{1}{2!2!} (4\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4) - 4\alpha(v_1, v_3)\beta(v_2, v_4) + 4\alpha(v_1, v_4)\beta(v_2, v_3) \\ &\quad + 4\alpha(v_2, v_3)\beta(v_1, v_4) - 4\alpha(v_2, v_4)\beta(v_1, v_3) + 4\alpha(v_3, v_4)\beta(v_1, v_2)) = \\ &\quad \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2, v_4) + \alpha(v_1, v_4)\beta(v_2, v_3) \\ &\quad + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1, v_4) - \alpha(v_2, v_4)\beta(v_1, v_3) + \alpha(v_3, v_4)\beta(v_1, v_2).\end{aligned}$$

Zupełnie nieprzypadkowo współczynniki liczbowe za każdym razem się upraszczają. Oto najważniejsze własności iloczynu zewnętrznego:

Fakt 3 1. *Iloczyn zewnętrzny jest operacją dwuliniową, tzn.:*

$$(a\alpha + b\alpha') \wedge \beta = a\alpha \wedge \beta + b\alpha' \wedge \beta, \quad \alpha \wedge (a\beta + b\beta') = a\alpha \wedge \beta + b\alpha \wedge \beta'.$$

2. Iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn.:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3. Iloczyn zewnętrzny w ogólności nie jest przemienny, ale zachodzi wzór:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Dowód: (1) Fakt ten wynika łatwo z definicji. (2) Dowód tego faktu jest dość nieprzyjemny. Polega na pokazaniu, że lewa i prawa strona obliczona na układzie $k + l + p$ wektorów daje

$$\sum_{\sigma \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!p!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+p)}).$$

Istotnie, zajmijmy się najpierw lewą stroną wzoru:

$$[(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma](v_1, \dots, v_{k+l+p}) = \sum_{\rho \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\rho)}{(k+l)!p!} \alpha \wedge \beta(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k+l)}) \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)})$$

Żeby zrealizować iloczyn zewnętrzny $\alpha \wedge \beta$ musimy teraz wykonać sumowanie po wszystkich permutacjach jego argumentów. Można to zrealizować za pomocą zastosowania wszystkich możliwych permutacji $\sigma \in S_{k+l}$ do argumentów permutacji ρ . Co prawda oznacza to zastosowanie permutacji σ i ρ w odwrotnej kolejności niżby to wynikało ze wzoru definicyjnego iloczynu zewnętrznego, ale ponieważ i tak chłodzi o wysumowanie po wszystkich przestawieniach, ostatecznie różnicy nie ma:

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\rho)}{(k+l)!p!} \alpha \wedge \beta(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k+l)}) \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) = \\ \sum_{\substack{\rho \in S_{k+l+p} \\ \sigma \in S_{k+l}}} \frac{\text{sgn}(\rho) \text{sgn}(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!} \alpha(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))}) \beta(v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}) \\ \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) \end{aligned}$$

W zbiorze układów wektorów

$$(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))}, v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}, v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)})$$

to samo uporządkowanie występuje wiele razy. Dla różnych par ρ i σ złożenie $\rho \circ \sigma$ może być takie samo. Traktujemy tutaj permutację $\sigma \in S_{k+l}$ jako element grupy S_{k+l+p} nie ruszający ostatnich p elementów. To samo uporządkowanie (nazwijmy je ω) pojawia się tyle razy, ile jest permutacji σ , gdyż ustaliliśmy σ odpowiednie ρ obliczymy ze wzoru

$$\rho = \omega \circ \sigma^{-1}.$$