

2. Iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn.:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3. Iloczyn zewnętrzny w ogólności nie jest przemienny, ale zachodzi wzór:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Dowód: Punkt (1) wynika łatwo z definicji. Dowód punktu (2) polega na pokazaniu, że lewa i prawa strona obliczona na układzie $k + l + p$ wektorów daje

$$\sum_{\sigma \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!p!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+p)}).$$

Istotnie, zajmijmy się najpierw lewą stroną wzoru:

$$[(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma](v_1, \dots, v_{k+l+p}) = \sum_{\rho \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\rho)}{(k+l)!p!} \alpha \wedge \beta(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k+l)}) \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)})$$

Żeby zrealizować iloczyn zewnętrzny $\alpha \wedge \beta$ musimy teraz wykonać sumowanie po wszystkich permutacjach jego argumentów. Można to zrealizować za pomocą zastosowania wszystkich możliwych permutacji $\sigma \in S_{k+l}$ do argumentów permutacji ρ . Co prawda oznacza to zastosowanie permutacji σ i ρ w odwrotnej kolejności niżby to wynikało ze wzoru definicyjnego iloczynu zewnętrznego, ale ponieważ i tak chodzi o wysumowanie po wszystkich przedstawieniach, ostatecznie różnicy nie ma:

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\rho)}{(k+l)!p!} \alpha \wedge \beta(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k+l)}) \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) = \\ \sum_{\substack{\rho \in S_{k+l+p} \\ \sigma \in S_{k+l}}} \frac{\text{sgn}(\rho) \text{sgn}(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!} \alpha(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))}) \beta(v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}) \\ \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) \end{aligned}$$

W zbiorze układów wektorów

$$(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))}, v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}, v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)})$$

to samo uporządkowanie występuje wiele razy. Dla różnych par ρ i σ złożenie $\rho \circ \sigma$ może być takie samo. Traktujemy tutaj permutację $\sigma \in S_{k+l}$ jako element grupy S_{k+l+p} nie ruszający ostatnich p elementów. To samo uporządkowanie (nazwijmy je ω) pojawia się tyle razy, ile jest permutacji σ , gdyż ustaliliśmy σ odpowiednie ρ obliczymy ze wzoru

$$\rho = \omega \circ \sigma^{-1}.$$

Z własności znaku permutacji wiadomo także, że $\text{sgn}(\rho)\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\omega)$. Zamiast sumować więc po permutacjach z S_{k+l+p} i S_{k+l} możemy sumować jedynie po permutacjach z S_{k+l+p} uwzględniając każdą permutację $(k+l)!$ razy:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \in S_{k+l+p} \\ \sigma \in S_{k+l}}} \frac{\text{sgn}(\rho)\text{sgn}(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!} \alpha(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))}) \beta(v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}) \\ \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) = \\ \sum_{\omega \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\omega)(k+l)!}{(k+l)!p!k!l!} \alpha(v_{\omega(1)}, \dots, v_{\omega(k)}) \beta(v_{\omega(k+1)}, \dots, v_{\omega(k+l)}) \gamma(v_{\omega(k+l+1)}, \dots, v_{\omega(k+l+p)}) = \\ \sum_{\omega \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\omega)}{p!k!l!} \alpha(v_{\omega(1)}, \dots, v_{\omega(k)}) \beta(v_{\omega(k+1)}, \dots, v_{\omega(k+l)}) \gamma(v_{\omega(k+l+1)}, \dots, v_{\omega(k+l+p)}). \end{aligned}$$

Podobnie postąpimy z prawą stroną wzoru. Sumować będziemy po permutacjach $\rho \in S_{k+l+p}$ a następnie $\sigma \in S_{l+p}$ aplikując σ do układu $(k+1, \dots, k+l+p)$. Zauważamy następnie, że σ można traktować jako element S_{k+l+p} nie ruszający pierwszych k liczb i że każdy układ wektorów powtarza się z tym samym znakiem $(l+p)!$ razy. W ten sposób dochodzimy do tej samej postaci wzoru po prawej stronie. Równość z punktu (3) sprawdzamy prostym rachunkiem. $\square$

Wspominaliśmy już, że każdy k -kovektor jest zadany przez swoje wartości na układach wektorów bazowych. Wartości te są współrzędnymi k -kovektora w pewnej bazie. Znajdźmy tę bazę. Niech, jak poprzednio, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ będzie bazą w V . Kovektory tworzące bazę dualną oznaczmy $(\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n)$. Wybierzmy teraz k -elementowy zbiór indeksów $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ i uporządkujemy indeksy rosnąco, tzn. $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$. Interesuje nas k -kovektor

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}.$$

Jeśli w zbiorze I choć jeden indeks powtarza się, to powyższy k -kovektor jest równy zero (zamiana miejscami dwóch czynników powinna powodować zmianę znaku, jednak jeśli czynniki te są jednokowe, tak naprawdę nic się nie zmienia). Możemy więc rozważać tylko takie zbiory indeksów, że $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Obliczmy k -kovektor $\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}$ na układzie wektorów $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ (zakładamy także, że indeksy w tym układzie wektorów są uporządkowane rosnąco):

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \epsilon^{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}}) \cdot \dots \cdot \epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}}).$$

W powyższej sumie albo wszystkie składniki są równe 0, albo jest tylko jeden niezerowy składnik. Wszystkie składniki są równe zero, jeśli zbiory $\{i_1, \dots, i_k\}$ i $\{j_1, \dots, j_k\}$ nie są identyczne. Wtedy zawsze przynajmniej jedna ewaluacja $\epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$ w każdym z iloczynów jest równa 0. Jeśli zbiory indeksów są jednakowe wtedy w powyższej sumie jest jeden niezerowy wyraz dla permutacji identycznościowej (założyliśmy początkowo, że indeksy w obu zbiorach są uporządkowane rosnąco). W takiej sytuacji otrzymujemy

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \epsilon^{i_2}(e_{i_2}) \cdot \dots \cdot \epsilon^{i_k}(e_{i_k}) = 1$$

Postulujemy, że układ k -kovektorów składający się ze wszystkich iloczynów zewnętrznych k kovektorów bazowych z odpowiednio uporządkowanymi indeksami jest dobrą bazą w $\bigwedge^k V^*$. Liczba k -kovektorów w powyższym układzie się zgadza, tzn jest ich liczba równa wymiarowi przestrzeni. Ponadto układ ten jest liniowo niezależny: wystarczy obliczyć wartości kombinacji liniowej wektorów z tego układu na wszystkich k elementowych ciągach wektorów bazowych e_i z uporządkowanymi rosnąco indeksami. Na każdym z takich ciągów wartość niezerową ma tylko jeden z k -kovektorów, co daje warunek znikania współczynnika przy tym właśnie k -kovektorze. Badany przez nas układ k -kovektorów jest zatem liniowo niezależny i ma liczbę elementów równą wymiarowi przestrzeni, jest więc bazą tej przestrzeni. Każdy k -kovektor α można zapisać jako kombinację liniową

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}$$

Jeśli jako przestrzeń wektorową weźmiemy przestrzeń styczną $V = T_q M$ do rozmaitości M w punkcie q , możemy mówić o wielokovektorach na rozmaitości. Mamy wtedy zazwyczaj do dyspozycji bazę w $T_q M$ pochodzącą od układu współrzędnych oraz dualną do niej bazę w $T_q^* M$, składającą się z różniczek współrzędnych. Jeśli $(x^1, \dots, x^n)$ oznaczają współrzędne na n -wymiarowej rozmaitości M , to k -kovektor w punkcie $q \in M$ jest postaci

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Założmy teraz, że w każdym punkcie powierzchni M , a przynajmniej w każdym punkcie q pewnego otwartego zbioru $\mathcal{O} \subset M$ zadany jest kovektor $\alpha(q)$. Mamy więc odwzorowanie

$$\alpha : \mathcal{O} \longrightarrow \bigwedge^k T^* M.$$

wymagać będziemy dodatkowo, aby współczynniki $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$ zależały od punktu w taki sposób, żeby wyrażone we współrzędnych $(x^1, \dots, x^m)$ były gładkimi funkcjami tych współrzędnych. W dziedzinie jednego układu współrzędnych możemy napisać

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1, \dots, x^m) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Odwzorowanie α nazywamy k -formą na $\mathcal{O}$. Przykładem 1-formy jest różniczka funkcji

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m.$$

Różniczka funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ma postać

$$df(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

i jest określona we wszystkich punktach $\mathbb{R}^2$ poza $(0,0)$. W punkcie $(0,0)$ funkcja f nie jest różniczkowalna. Ta sama funkcja zapisana w biegunowym układzie współrzędnych ma postać

$$f(r, \varphi) = r,$$

zatem jej różniczka to po prostu

$$df(r, \varphi) = dr.$$

Przykładem dwuformy na $\mathbb{R}^2$ jest tzw. forma objętości zorientowanej związana z kanonicznym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^2$ (o formach objętości dokładniej powiemy później)

$$dx \wedge dy$$

Tę samą formę możemy wyrazić we współrzędnych biegunowych biorąc pod uwagę, że

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

Mnożymy zewnętrznie dx i dy wyrażone we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = \\ &= (\cos \varphi dr) \wedge (\sin \varphi dr) + (\cos \varphi dr) \wedge (r \cos \varphi d\varphi) + (-r \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi dr) + (-r \sin \varphi d\varphi) \wedge (r \cos \varphi d\varphi) = \\ &= \cos \varphi \sin \varphi dr \wedge dr + r \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi - r \sin^2 \varphi d\varphi \wedge dr - r^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Pierwszy i ostatni składnik są równe zero, ponieważ iloczyn zewnętrzny dwóch identycznych kowektorów jest równy zero. Oznacza to, że

$$dx \wedge dy = r \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi - r \sin^2 \varphi d\varphi \wedge dr$$

Korzystając z własności iloczynu zewnętrznego piszemy

$$d\varphi \wedge dr = -dr \wedge d\varphi,$$

zatem ostatecznie

$$dx \wedge dy = (r \cos^2 \varphi + r \cos^2 \varphi) dr \wedge d\varphi = r dr \wedge d\varphi.$$

Zauważmy, że w zbiorze $\wedge^k T^*M$ wprowadzić można strukturę wiązki wektorowej podobnie jak robiliśmy w samym T^*M . Ponieważ zewnętrznie mnożymy kowektory zaczepione w jednym punkcie, istnieje dobrze określone odwzorowanie

$$\wedge^k \pi_m : \wedge^k T^*M \longrightarrow M$$

Współrzędne w $\mathcal{O} \subset M$ dostarczają bazy w każdej z przestrzeni $\wedge^k T_q^*M$, co pozwala wprowadzić współrzędne w $(\wedge^k \pi_m)^{-1}(\mathcal{O})$. Zamiana współrzędnych ma w ustalonym punkcie charakter liniowy. Używając tego języka powiedzielibyśmy, że k -forma na rozmaitości to gładkie cięcie wiązki k -kowektorów $\wedge^k \pi_m$.

4.2 Różniczka zewnętrzna

W poprzednich rozdziałach używaliśmy specjalnego oznaczenia na zbiór gładkich cięć wiązki stycznnej $\mathcal{X}(M)$. Wygodnie jest także wprowadzić oznaczenie na zbiór gładkich cięć wiązki $\wedge^k \pi_M$ k -kovektorów: $\Omega^k(M)$. Funkcje gładkie na romaiotści M uważać będziemy za zero-formy, tzn. $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ a iloczyn zewnętrzny 0-formy i k -formy to po prostu mnożenie k -formy przez funkcję.

Fakt 4 *Operator liniowy*

$$d: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

spełniający następujące warunki: (1) d w działaniu na 0-formy jest równy zdefiniowanej wcześniej różniczce funkcji; (2) jeśli $\alpha \in \Omega^k(M)$ i $\beta \in \Omega^l(M)$ to $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$; (3) $d^2 = 0$, tzn $d(d\alpha) = 0$ dla dowolnej formy α , jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód: Załóżmy, że operator d istnieje. Wówczas warunek (2) pozwala go zadać jedynie na 0-formach i 1-formach, ponieważ wszystkie inne wyprodukujemy korzystając z liniowości i reguły Leibniza (czyli właśnie warunku (2)). Na 0-formach wartość d jest określona przez warunek (1). Każda 1-forma jest kombinacją liniową wyrażeń postaci $f dg$, gdzie f, g są funkcjami gładkimi. Używając więc (2) i (3) dostajemy

$$d(fdg) = df \wedge dg + fddg = df \wedge dg.$$

□

Fakt 5 *Operator d istnieje.*

Dowód: W dziedzinie $\mathcal{O}$ lokalnego układu współrzędnych (x^i) działanie d zadamy wzorem „we współrzędnych”. Ze względu na liniowość wystarczy wiedzieć jak działa d na formę α postaci $a(x)dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$:

$$d(a(x)dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = da \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Pozostaje sprawdzić własności (1)-(3). Warunek (1) jest spełniony automatycznie, warunek (2) sprawdzamy rachunkiem: Weźmy

$$\alpha = adx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \beta = bdx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l},$$

gdzie a i b są funkcjami we współrzędnych (x^i) , wtedy

$$\alpha \wedge \beta = abdx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}.$$

Aplikujemy operator d :

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(ab) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = \\ &= (adb + bda) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = \\ &= adb \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} + \\ &+ bda \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = \\ &= (da \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (bdx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) + \\ &+ (-1)^k (adx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (db \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) = \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

Pozostaje do sprawdzenia warunek (3). Wystarczy go sprawdzić dla funkcji:

$$ddf = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i = 0$$

Ostatnia równość wynika z równości drugich pochodnych cząstkowych mieszanych dla funkcji gładkich. Zachowania za względu na zamianę zmiennych nie musimy sprawdzać, gdyż mamy jednoznaczność $\square$

Zanim zagłębimy się dalej w teorię zrobmy kilka przykładów:

Przykład 15 Znaleźć dA , jeśli $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

$$\begin{aligned} dA &= d(A_x dx + A_y dy + A_z dz) = d(A_x dx) + d(A_y dy) + d(A_z dz) = \\ &\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} dx + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz\right) \wedge dy + \\ &\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz\right) \wedge dz = \\ &\frac{\partial A_x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \wedge dy + \\ &\frac{\partial A_z}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \wedge dz + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \wedge dz = \end{aligned}$$

Wyrazy szare znikają, gdyż zawierają iloczyn zewnętrzny powtarzających się kowektorów. Pozostałe wyrazy jednokolorowe można dodać, zmieniając ewentualnie kolejność mnożenia zewnętrznego. Otrzymujemy więc

$$dA = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz.$$

Czy współczynniki przy 2-kowektorach bazowych czegoś nie przypominają? ♣

Przykład 16 Znaleźć $d\omega$, jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + xy + y^2}$$