

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\left(\frac{1}{x^2 + xy + y^2}\right) \wedge (xdy - ydx) + \frac{1}{x^2 + xy + y^2} d(xdy - ydx) = \\
&= \frac{(-1)}{(x^2 + xy + y^2)^2} [(2x + y)dx + (2y + x)dy] \wedge (xdy - ydx) + \\
&\quad + \frac{1}{x^2 + xy + y^2} (dx \wedge dy - dy \wedge dx) = \\
&= \frac{(-1)}{(x^2 + xy + y^2)^2} [(2x^2 + xy)dx \wedge dy - (2y^2 + xy)dy \wedge dx] + \frac{2}{x^2 + xy + y^2} dx \wedge dy = \\
&= \left(\frac{(-1)(2x^2 + 2xy + 2y^2)}{(x^2 + xy + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + xy + y^2} \right) dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

♣

Przykład 17 Znaleźć $d\beta$, jeśli $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (xzdx + yzdy + (x^2 + y^2)dz)$$

$$\begin{aligned}
d\beta &= d\left(\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx\right) + d\left(\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy\right) + d(\sqrt{x^2 + y^2}dz) = \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dz \wedge dx + \frac{-2xyz}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}dy \wedge dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dz \wedge dy + \frac{-2xyz}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}dx \wedge dy + \\
&\quad \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}(2xdx + 2ydy) \wedge dz =
\end{aligned}$$

czerwone składniki się upraszczają i otrzymujemy

$$d\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(dz \wedge dx + dx \wedge dz) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(dz \wedge dy + dy \wedge dz) = 0.$$

♣

Przy okazji powyższych rachunków okazało się, że istnieją niezerowe (i całkiem skomplikowane) formy, których różniczka jest zero. Używać będziemy następujących nazw: jeśli $d\alpha = 0$, to α nazywa się formą *zamkniętą*, jeśli $\alpha = d\beta$, to α jest formą *zupelną*. Każda forma zupełna jest zamknięta. Czy jest też odwrotnie? Odpowiedź na to pytanie odkładamy na nieodległą przyszłość.

Oprócz wzoru „na współrzędnych” oraz niekonstruktywnej definicji poprzez własności, mamy także wzór na różniczkę formy wyrażoną za pomocą jej wartości na układzie pól wektorowych. Wzór ten pokazuje związek różniczkowania form z nawiasem Liego pól wektorowych:

Fakt 6 (Wzór Cartana) *Jeśli $X_1, X_2, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$ oraz $\omega \in \Omega^k(M)$, to*

$$\begin{aligned}
d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k-1} X^i \omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \\
&\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

Symbol $\check{X}_i$ oznacza „opuszczony” element układu pól wektorowych.

Dowód: Sprawdźmy przede wszystkim, czy powyższy wzór na $d\omega$ określa rzeczywiście $k + 1$ -formę. Na oko widać, że wyrażenie po prawej stronie jest liniowe ze względu na każdy z argumentów, antysymetrię też dość łatwo sprawdzić. Trzeba jeszcze jednak zwrócić uwagę na to, czy wartość prawej strony zależy jedynie od wartości pól w punkcie a nie na przykład także od pochodnych tych pól. Na pierwszy rzut oka pochodne mogą być zaangażowane, gdyż we wzorze występuje nawias pól a także działanie pola na funkcję skonstruowaną z formy i pozostałych pól. Sprawdzić to można na przykład badając jak zachowuje się prawa strona, kiedy jedno z pól pomnożymy przez funkcję. Ze względu na antysymetrię wystarczy pomnożyć pierwsze pole. Jeśli rzeczywiście wzór określa $(k + 1)$ -formę, to powinniśmy otrzymać wzór

$$d\omega(fX_1, X_2, \dots, X_{k+1}) = f d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}),$$

czyli żadnego różniczkowania funkcji !!! Sprawdzamy: Gdy w pierwszej sumie weźmiemy $i = 1$, otrzymamy

$$fX_1\omega(X_2, \dots, X_{k+1}),$$

gdy $i > 1$

$$\begin{aligned} (-1)^{i-1}X_i\omega(fX_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) &= \\ (-1)^{i-1}X_i f\omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) &= \\ (-1)^{i-1} \left((X_i f)\omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) + fX_i\omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) \right). \end{aligned}$$

Składnik zaznaczony na czerwono jest niepożądany, gdyż zawiera różniczkowanie funkcji f . Sprawdzamy kolejne składniki. W drugiej sumie, gdy $i \neq 1$ mamy

$$(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], fX_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) = (-1)^{i+j}f\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

Jeśli jednak $i = 1$ to nawias przyjmuje postać

$$[fX_1, X_j] = f[X_1, X_j] - (X_j f)X_1,$$

co po wstawieniu „pod ω ” daje

$$\begin{aligned} (-1)^{1+j}\omega(f[X_1, X_j] - (X_j f)X_1, X_2, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) &= \\ (-1)^{1+j}f\omega([X_1, X_j], X_2, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) - (-1)^{1+j}(X_j f)\omega(X_1, X_2, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

Kolejne wyrażenie na czerwono też jest niepożądane, gdyż zawiera różniczkowanie funkcji. Jednak oba czerwone składniki różnią się znakiem (dla $i = j$) zatem uproszczą się w wyrażeniu po prawej stronie wzoru Cartana. Wyrażenie to zależy więc tylko od wartości pól w punkcie a nie w pewnym otoczeniu. Teraz wystarczy tylko sprawdzić, czy wzór ten daje to co trzeba we współrzędnych. W tym celu trzeba obliczyć prawą stronę na polach współrzędnościowych $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Jest to bardzo proste, ponieważ pola współrzędnościowe komutują, znika więc druga suma we wzorze. Dalszy rachunek jest już oczywisty. $\square$

Zobaczmy, jak wygląda różniczka funkcji f , jednoformy η i dwuformy postaci $d\eta$ według wzoru Cartana:

$$df(X) = Xf$$



Rys. 23: Élie Cartan (1869-1951).

$$d\eta(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])$$

Policzmy teraz $dd\eta(X, Y, Z)$. Oczywiście powinno wyjść zero:

$$\begin{aligned} 0 = dd\eta(X, Y, Z) = & Xd\eta(Y, Z) - Yd\eta(X, Z) + Zd\eta(X, Y) - d\eta([X, Y], Z) + d\eta([X, Z], Y) - d\eta([Y, Z], X) = \\ & X(Y\eta(Z) - Z\eta(Y) - \eta([Y, Z])) \\ & - Y(X\eta(Z) - Z\eta(X) - \eta([X, Z])) \\ & + Z(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])) \\ & - [X, Y]\eta(Z) + Z\eta([X, Y]) + \eta([X, Y], Z) \\ & + [X, Z]\eta(Y) - Y\eta([X, Z]) - \eta([X, Z], Y) \\ & - [Y, Z]\eta(X) + X\eta([Y, Z]) + \eta([Y, Z], X) = \end{aligned}$$

Jednokolorowe wyrażenia się upraszczają i zostaje

$$\begin{aligned} = & -X\eta([Y, Z]) + Y\eta([X, Z]) - Z\eta([X, Y]) \\ & + Z\eta([X, Y]) + \eta([X, Y], Z) - Y\eta([X, Z]) - \eta([X, Z], Y) + X\eta([Y, Z]) + \eta([Y, Z], X) = \end{aligned}$$

Jednokolorowe znowu się upraszczają, teraz zostaje

$$= \eta([X, Y], Z) - \eta([X, Z], Y) + \eta([Y, Z], X)$$

Znikanie drugiej różniczki jest więc równoważne tożsamości Jacobiego.

Niech $\varphi : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Dyskutowaliśmy już cofnięcie różniczki funkcji określone wzorem

$$\varphi^*df = d(f \circ \varphi).$$

Zauważmy, że zachodzi

$$(\varphi^*df)(v) = df(T\varphi(v)).$$

Korzystając z tej obserwacji można zdefiniować cofnięcie dowolnej k -formy:

$$\varphi^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(\mathbb{T}\varphi(v_1), \dots, \mathbb{T}\varphi(v_k))$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta.$$

Jak zachowuje się cofnięcie formy względem różniczki?

Fakt 7

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$$

Dowód: Lokalnie każda forma jest sumą wyrażeń postaci

$$f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k.$$

Mamy więc

$$\varphi^*(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = (f \circ \varphi)(\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dg_k)$$

i

$$d[\varphi^*(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)] = d(f \circ \varphi) \wedge (\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dg_k) = (\varphi^* df) \wedge (\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dg_k)$$

Z drugiej strony

$$d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$$

i

$$\varphi^*d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = (\varphi^* df) \wedge (\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dg_k).$$

□

4.3 Formy zamknięte i zupełne.

Policzmy różniczkę następującej formy różniczkowej określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\alpha = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx = \frac{x^2 - y^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx = 0 \end{aligned}$$

Okazuje się więc, że forma ewidentnie niezerowa, mająca współczynniki wyrażające się dość skomplikowanymi wzorami i nie będące stałymi funkcjami ma różniczkę równą zero. Już wiemy, że tak powinno być jeśli forma α jest zupełna, to znaczy jeśli $\alpha = df$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. Spróbujmy znaleźć taką funkcję. Dla form określonych na całym $\mathbb{R}^2$