

Korzystając z tej obserwacji można zdefiniować cofnięcie dowolnej k -formy:

$$\varphi^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(\mathbb{T}\varphi(v_1), \dots, \mathbb{T}\varphi(v_k))$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta.$$

Jak zachowuje się cofnięcie formy względem różniczki?

Fakt 7

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$$

Dowód: Lokalnie każda forma jest sumą wyrażeń postaci

$$f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k.$$

Mamy więc

$$\varphi^*(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = (f \circ \varphi)(\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dg_k)$$

i

$$d[\varphi^*(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)] = d(f \circ \varphi) \wedge (\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dg_k) = (\varphi^* df) \wedge (\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dg_k)$$

Z drugiej strony

$$d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$$

i

$$\varphi^*d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = (\varphi^* df) \wedge (\varphi^* dg_1) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dg_k).$$

□

4.3 Formy zamknięte i zupełne.

Policzmy różniczkę następującej formy różniczkowej określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\alpha = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx = \frac{x^2 - y^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx = 0 \end{aligned}$$

Okazuje się więc, że forma ewidentnie niezerowa, mająca współczynniki wyrażające się dość skomplikowanymi wzorami i nie będące stałymi funkcjami ma różniczkę równą zero. Już wiemy, że tak powinno być jeśli forma α jest zupełna, to znaczy jeśli $\alpha = df$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. Spróbujmy znaleźć taką funkcję. Dla form określonych na całym $\mathbb{R}^2$

i mających znikającą różniczkę procedura znajdowania odpowiedniej funkcji jest względnie prosta: Niech $\beta = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ będzie gładką formą na $\mathbb{R}^2$ taką, że $d\beta = 0$. Co to oznacza dla współczynników f i g :

$$d\beta = \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

$$d\beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

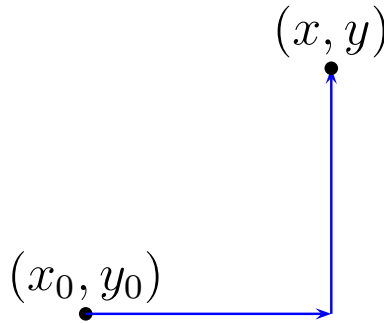
Niech teraz (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem $\mathbb{R}^2$. Funkcja

$$h(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y g(x, t)dt$$

jest gładką funkcją na $\mathbb{R}^2$, ponadto

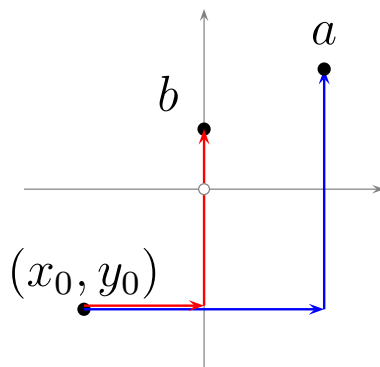
$$\begin{aligned} dh(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x f(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y g(x, t)dt \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x f(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y g(x, t)dt \right) dy = \\ &= \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)dt \right) dx + g(x, y)dy = \\ &= \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)dt \right) dx + g(x, y)dy = \\ &= (f(x, y_0) + f(x, y) - f(x, y_0)) dx + g(x, y)dy = \beta \end{aligned}$$

W powyższym rachunku skorzystaliśmy z równości pochodnych cząstkowych funkcji f i g . O powyższej procedurze można myśleć jak o całkowaniu formy β po łamanej składającej się z odcinków od (x_0, y_0) do (x, y_0) i dalej od (x, y_0) do (x, y) . Na kolejnych wykładach mówić będziemy o całkowaniu form i wtedy okaże się, że jest to dokładnie to. Na razie jednak powyższe całki można całkować jako całki z parametrem. Wynik całkowania jest funkcją punktu końcowego. Ponieważ przepis dotarcia do punktu końcowego jest jednoznacznie określony (Rys. 24) dostajemy dobrze określoną funkcję. Własności całek zapewniają gładkość tej funkcji. Funk-



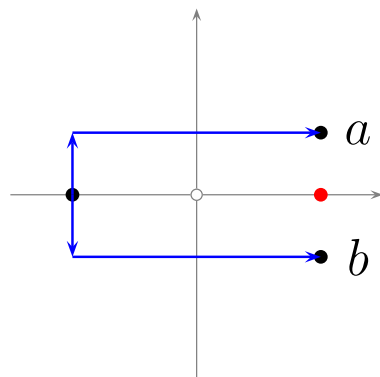
Rys. 24: Konstrukcja funkcji pierwotnej

cję h nazwiemy *funkcją pierwotną* formy β . Ze względu na dowolność wyboru (x_0, y_0) funkcji pierwotnych jest wiele. Dwie funkcje pierwotne tej samej formy β różnią się o funkcję, której różniczka jest równa 0, czyli o funkcję stałą.



Rys. 25: Problemy z konstrukcją funkcji pierwotnej.

Spróbujmy tak samo znaleźć funkcję pierwotną formy α . Napotkamy tutaj problem przedstawiony na rysunku 25. Do punktu b nie możemy dojść „według przepisu” ponieważ musieliśmy przejść przez punkt w którym forma nie jest określona. Nie da się więc policzyć jednej z całek występujących we wzorze. Można spróbować obejść ten problem definiując bardziej skomplikowane przepisy dochodzenia do każdego z punktów. Jeśli np. $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ możemy ustanowić następującą zasadę: do punktów w górnej półpłaszczyźnie dochodzimy idąc najpierw w górę potem poziomo, a w dolnej najpierw w dół, potem poziomo (Rys. 26). Co



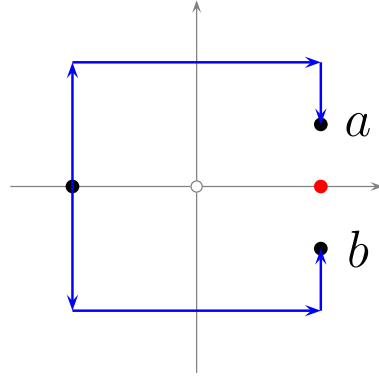
Rys. 26: A może tak?

jednak zrobić z punktami na dodatniej półosi poziomej? Okazuje się, że nie da się wymyśleć takiego przepisu, żeby funkcja pierwotna określona była także w punktach półosi poziomej dodatniej i jednocześnie była ciągła. Jeśli na przykład $a = (1, \epsilon)$ a $b = (1, -\epsilon)$, to zgodnie opisanym powyżej przepisem

$$h(a) = \arctan(\epsilon) + 2 \arctan(1/\epsilon), \quad h(b) = -\arctan(\epsilon) - 2 \arctan(1/\epsilon).$$

Gdy ϵ dąży do zera granica „od góry” jest π a od dołu $-\pi$. Może jednak tak jest źle, bo zmniejszanie epsilon oznacza, że trzeba w granicy przejść przez niedozwolony punkt. Co zmieni się, jeśli droga będzie wyglądała tak jak na rysunku 27? Droga od góry to

$$h(a) = \arctan(1) + \arctan(1) - \arctan(-1) - \arctan(\epsilon) + \arctan(1) = \pi - \arctan(\epsilon)$$



Rys. 27: Jeszcze jedna próba.

a droga od dołu

$$h(b) = -\arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(-1) + \arctan(\epsilon) - \arctan(1) = -\pi + \arctan(\epsilon)$$

Gdy zmniejszamy epsilon droga od góry daje w granicy wartość π , a od dołu $-\pi$. Konstruując funkcję pierwotną do β napotykamy wciąż na trudności. Uzasadnijmy ostatecznie, że zrobić się tego nie da. Najłatwiej będzie użyć dwóch układów współrzędnych typu biegunowego. Proste rachunki pokazują, że w układzie współrzędnych (r, φ) takim, że $r > 0$ i $\varphi \in]0, 2\pi[$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ określonym na obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \geq 0\}$ otrzymujemy $\beta = -d\varphi$. Jedną z możliwych funkcji pierwotnych (w tym obszarze) to $h_0(r, \varphi) = -\varphi$. Podobny układ współrzędnych możemy zadać tymi samymi wzorami zastępując r przez $\tilde{r}$ i φ przez $\tilde{\varphi}$ w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \leq 0\}$ dla $\tilde{\varphi} \in]-\pi, \pi[$. Znowu $\beta = -d\tilde{\varphi}$ i jedna z możliwych funkcji pierwotnych ma postać $h_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = -\tilde{\varphi}$. Załóżmy teraz, że istnieje funkcja pierwotna f określona na całej dziedzinie formy β . Funkcja ta może różnić się od h_0 i h_1 w obszarze ich określoności co najwyżej o stałą. Niech więc $f = h_0 + \varphi_0$ i $f = h_1 + \varphi_1$. Porównajmy wartości funkcji w punktach $p = (0, 1)$ i $q = (0, -1)$.

$$h_0(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_0(q) = \frac{3\pi}{2}, \quad h_1(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_1(q) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(p) = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \varphi_1,$$

$$f(q) = \frac{3\pi}{2} + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi + \varphi_0 = \varphi_1$$

Porównanie wartości funkcji f w punktach q i p prowadzi do sprzeczności. Funkcja f pierwotna do β na całej dziedzinie tej formy nie istnieje! Powyższy przykład pokazuje też, że problem leży nie tyle w formie, co w obszarze na którym ta forma jest określona.

Definicja 17 Mówimy, że rozmaitość M jest *ściągalna do punktu* $x_0 \in M$ jeśli istnieje gładkie odwzorowanie

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

takie, że

$$\forall x \in M \quad H(x, 1) = x, \quad \forall x \in M \quad H(x, 0) = x_0.$$

Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest ściągalna do zera: $H(x, y, t) = (tx, ty)$ (i do każdego innego punktu), zaś $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nie jest ściągalna do żadnego punktu. Związek istnienia formy pierwotnej z kształtem obszaru wypowiedziany jest w poniższym twierdzeniu nazywanym *Lematem Poincaré*:

Twierdzenie 4 *Każda forma zamknięta na rozmaitości ściągalnej jest zupełna.*

Dowód: Zanim przejdziemy do właściwego dowodu twierdzenia potrzebujemy kilku ogólnych obserwacji. Weźmy odcinek I otwarty, zawierający $[0, 1]$, rozmaitość M i rodzinę odwzorowań

$$i_t : M \rightarrow M \times I, \quad i_t(x) = (x, t).$$

Niech ω będzie jednoformą na $M \times I$. Wiadomo, że $T(M \times I) = TM \times TI$ oraz $T^*(M \times I) = T^*M \times T^*I$. Jednoformę ω można więc zapisać jako sumę

$$\omega = \tilde{\omega} + f dt,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to odwzorowanie $M \times I \rightarrow T^*M$ zachowujące projekcję na M a f to funkcja na $M \times I$. Odnotujmy także, że

$$i_t^* \omega = \tilde{\omega}(t, \cdot).$$

Uzasadnimy teraz, że jeśli $d\omega = 0$ to $i_1^* \omega - i_0^* \omega$ jest zupełna. Różniczkę $d\omega$ wyrazić można za pomocą różniczkowania w kierunku M i kierunku I oddzielnie. $d\omega = d_M \omega + d_I \omega = d_M \tilde{\omega} + d_I \tilde{\omega} + d_M f \wedge dt$. Różniczkę $d_M \tilde{\omega}$ nie zawiera czynnika dt . Różniczkę $d_I \tilde{\omega}$ interpretować można następująco. Skoro $\tilde{\omega}$ jest odwzorowaniem z $M \times I$ w T^*M zachowującym rzut na M , to dla ustalonego $x \in M$ odwzorowanie $t \mapsto \tilde{\omega}(x, t)$ jest krzywą w przestrzeni wektorowej T_x^*M . Wektor styczny do tej krzywej dla każdej wartości parametru może być interpretowany jako element tej samej przestrzeni wektorowej. Oznaczmy ten wektor przez $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}$. Różniczkę

$$d_I \tilde{\omega} = dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Znikanie $d\omega$ oznacza, że

$$0 = d\omega = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + d_M f \wedge dt = d_M \tilde{\omega} + \left(d_M f - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \right) \wedge dt$$

Pierwszy składnik nie zawiera dt , więc znikanie różniczkę oznacza znikanie każdego ze składników oddzielnie. W szczególności

$$d_M f = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Z definicji całki z funkcji o wartościach wektorowych mamy, że

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = \tilde{\omega}(x, 1) - \tilde{\omega}(x, 0) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} dt = \int_0^1 (d_M f)(x, t) dt = d\left(\int_0^1 f(\cdot, t) dt\right)(x)$$

Oznaczając

$$g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$$

mamy

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = dg(x).$$

Identyczny rachunek przeprowadzić można dla k -formy ω .

$$\omega = \tilde{\omega} + dt \wedge \eta,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to rodzina k -form na M parametryzowana t a η to podobna rodzina $(k-1)$ -form.

$$d\omega = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - dt \wedge d_M \eta = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - d_M \eta \right).$$

$$d\omega = 0 \quad \text{oznacza} \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = d_M \eta.$$

Niech teraz $I : \Omega^k(M \times I) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ dane będzie wzorem

$$I(\omega)(x) = \int_0^1 \eta(x, t) dt.$$

W szczególności

$$I(d\omega) = \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - d_M \eta \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} dt - \int_0^1 (d_M \eta) dt = \tilde{\omega}(1, \cdot) - \tilde{\omega}(0, \cdot) - d \left(\int_0^1 \eta dt \right).$$

$$I(d\omega) + d(I(\omega)) = i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x)$$

Oczywiście gdy $d\omega = 0$ to

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = d(I(\omega)).$$

Przejdźmy teraz do właściwego dowodu lematu. Niech M będzie rozmaitością ściągającą do punktu x_0 i niech H będzie odpowiednim odwzorowaniem ściągnięcia

$$H : M \times I \rightarrow M.$$

Weźmy także zamkniętą formę α . Oczywiście skoro $d\alpha = 0$ to także $dH^* \alpha = 0$. Zgodnie więc powyższymi rachunkami

$$i_1^* H^* \alpha - i_0^* H^* \alpha = d(I(H^* \alpha)).$$

Pierwszy ze składników to

$$i_1^* H^* \alpha = (H \circ i_1)^* \omega = \omega,$$

bo H złożone z i_1 jest identycznością. W drugim składniku złożenie $(H \circ i_0)$ jest odwzorowaniem stałym: $(H \circ i_0)(x) = x_0$. Cofnięcie formy odwzorowaniem stałym jest zerowe, zatem

$$i_0^* H^* \alpha = (H \circ i_0)^* \omega = 0.$$

Ostatecznie

$$\omega = d(I(H^* \alpha)).$$

□