

orientacją ι i rozkład jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$ związany z tym atlasem. W sposób trywialny prawdą jest, że

$$\omega(p) = \sum_{i \in I} \alpha_i \omega(p)$$

Całkę z formy ω po obszarze D z orientacją ι możemy teraz zdefiniować wzorem

$$\int_{(D, \iota)} = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(D \cap \mathcal{O}_i)} (\alpha_i \circ \varphi^{-1})(\omega_i \circ \varphi^{-1})$$

Dla zwartego obszaru D jedynie skończona liczba składników jest niezerowa.

Przykład 19 Obliczyć całkę z formy $\omega = dy \wedge dz$ po fragmencie sfery S^2 dla którego $x \geq 0$ i $z \geq 0$ z orientacją zadaną przez bazę wektory $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi})$ pochodzące od sferycznego układu współrzędnych.

Forma ω zdefiniowana jest na $\mathbb{R}^3$. Żeby ją scałkować po S^2 trzeba ją najpierw obciąć do S^2 . W tym celu zapisujemy włożenie $\kappa : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ we współrzędnych:

$$\kappa(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

Obcięcie formy do sfery realizuje się jako pull-back za pomocą włożenia:

$$\begin{aligned} \kappa^* \omega &= d(\sin \varphi \sin \theta) \wedge d(\cos \theta) = (\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta) \wedge (-\sin \theta d\theta) = \\ &= (\cos \varphi \sin \theta d\varphi) \wedge (-\sin \theta d\theta) = -\cos \varphi \sin^2 \theta d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

Kolejność współrzędnych zgodna z orientacją jest (θ, φ) , więc formę zapisać należy jako

$$\omega = -\cos \varphi \sin^2 \theta d\varphi \wedge d\theta = \text{cos } \varphi \sin^2 \theta d\theta \wedge d\varphi$$

Obszar całkowania we współrzędnych (θ, φ) to $[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ostatecznie

$$\int_{(D, \iota)} \omega = \int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos \varphi \sin^2 \theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$



5.4 Rozmaitość z brzegiem

W dalszym ciągu E oznaczać będzie półprzestrzeń w $\mathbb{R}^n$, tzn. zbiór

$$E = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$$

z topologią indukowaną z $\mathbb{R}^n$ (zbiory otwarte w E to przecięcia zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$ z E). Hipreplaszczynę $\{x^1 = 0\}$ oznaczać będziemy Π . Zauważmy, że jeśli $\mathcal{O}$ i $\mathcal{U}$ są otwarte w E oraz $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ jest homeomorfizmem, to obcięcie $\varphi|_{\mathcal{O} \cap \Pi}$ jest homeomorfizmem $\mathcal{O} \cap \Pi$ i $\mathcal{U} \cap \Pi$. Zbiór E służy jako „standardowa” rozmaitość z brzegiem, podobnie jak $\mathbb{R}^n$ jest „standardową” rozmaitością (bez brzegu). Każdy kawałek rozmaitości z brzegiem powinien wyglądać jak kawałek E . Może to być kawałek brzegowy, albo kawałek z wnętrza. Do zdefiniowania struktury gładkiej rozmaitości z brzegiem potrzebujemy jeszcze pojęcia gładkości odwzorowań obszarów, których przecięcie z Π jest niepuste. Odwzorowanie $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ jest gładkie jeśli da się rozszerzyć do gładkiego odwzorowania $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$ takiego, że $\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte i $\mathcal{O} = E \cap \hat{\mathcal{O}}, \mathcal{U} = E \cap \hat{\mathcal{U}}$. W takim przypadku $\varphi|_{\mathcal{O} \cap \Pi}$ też jest gładkie.

Definicja 19 Przestrzeń topologiczna M jest *gładką rozmaitością z brzegiem* jeśli dla każdego $q \in M$ istnieją zbiory otwarte $q \in \mathcal{O} \subset M$, $\mathcal{U} \subset E$ i homeomorfizm $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$. Jeśli ponadto $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$, to odwzorowanie $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ jest gładkie.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U} \\ \downarrow \varphi' & \swarrow \varphi' \circ \varphi^{-1} & \\ \mathcal{U}' & & \end{array}$$

W rozmaitości z brzegiem wyróżniamy punkty wewnętrzne, tzn. takie, które mają otoczenia homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ i pozostałe, które nazywamy *brzegowymi*. Zbiór punktów brzegowych oznaczamy ∂M i nazywamy *brzegiem rozmaitości*. Zauważmy, że brzeg rozmaitości z brzegiem sam jest gładką rozmaitością (bez brzegu). Istotnie, jeśli $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ jest atlasem na M , to $(\mathcal{U}_i \cap \partial M, \varphi_i|_{\mathcal{U}_i \cap \partial M})_{i \in I}$ jest atlasem na brzegu.

Fakt 8 Niech M będzie orientowaną rozmaitością z brzegiem. Wtedy ∂M też jest orientowalna. Jeśli M jest zorientowana, to na ∂M istnieje wyróżniona orientacja.

Dowód. Wybierzmy jedną z orientacji na M . Niech $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ będzie atlasem zgodnym z orientacją. Indukowany atlas na M , którego dziedzinami są zbiory $\mathcal{O}_i \cap \partial M$ jest także atlasem zgodnym, tzn. wyznaczniki macierzy przejścia między współrzędnymi są dodatnie. Zauważmy, że jeśli $\varphi_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną $\mathcal{O}$ to $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \dots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną $\mathcal{O}_i \cap \partial M$. Atlas $(\mathcal{O}_i \cap \partial M, \tilde{\varphi}_i)$ zadaje indukowaną orientację brzegu. $\square$

Jeśli orientację M oznaczmy ι to orientację indukowaną ∂M oznaczać będziemy $\partial \iota$

Twierdzenie 7 (G.G. Stokes) Niech M będzie zwartą zorientowaną powierzchnią z brzegiem wymiaru n i niech ω będzie $n - 1$ -formą na M , wówczas

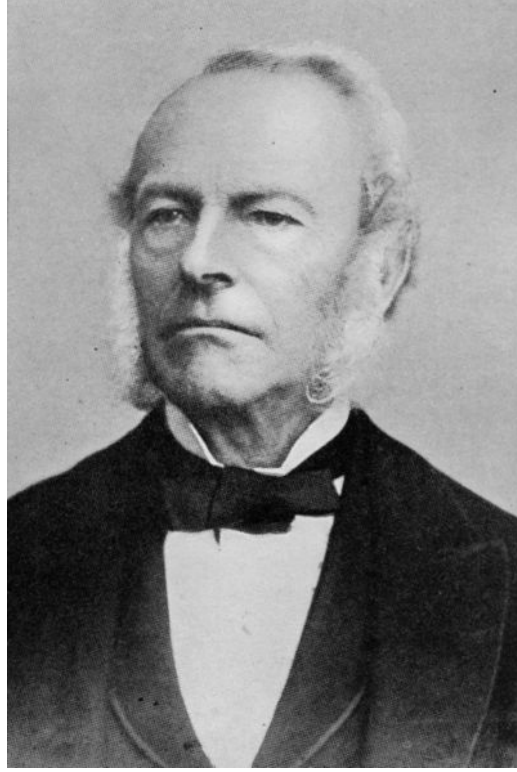
$$\int_{(M, \iota)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial \iota)} \omega.$$

Żeby uzyskać wgląd w sytuację zobaczmy najpierw jak wygląda całkowanie po kostce w $\mathbb{R}^n$. Kostka co prawda, nie jest rozmaitością z brzegiem z powodu kątów (brzeg jest jedynie kawałkami powierzchnią), jednak z punktu widzenia całkowania kanty nie są kłopotliwe. Niech D będzie n -wymiarową kostką, tzn.

$$D = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Brzeg D jest jedynie kawałkami powierzchnią, ale to nie bardzo przeszkadza. $(n - 1)$ -forma ω do całkowania po brzegu D może zostać zapisana w następujący sposób:

$$\omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n - \omega_2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + (-1)^{n+1} \omega_n dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$



Rys. 33: Sir George Gabriel Stokes.

Różniczkujemy:

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots + \\
 &\quad (-1)^{n+1} \frac{\partial \omega_n}{\partial x^2} dx^n \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = \\
 &\quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots + \\
 &\quad \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^n = \\
 &\quad \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n
 \end{aligned}$$

Oznaczamy teraz ι orientację kanoniczną $\mathbb{R}^n$ i całkujemy:

$$\begin{aligned} \int_{D, \iota} d\omega &= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} dx^2 \dots \text{bez } i \dots \int_{a_n}^{b_n} dx^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} dx^2 \dots \text{bez } i \dots \int_{a_n}^{b_n} dx^n \left(\omega_i(x^1, \dots, b_i, \dots, x^n) - \omega_i(x^1, \dots, a_i, \dots, x^n) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n - \sum_{i=1}^n \int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = \end{aligned}$$

W powyższym wzorze $\{x^i = b^i\}$ oznacza ścianę kostki daną równaniem $x^i = b^i$. Rozważmy więc parę ścian z ustaloną i -tą współrzędną. Forma ω obcięta do ściany $\{x^i = b^i\}$, jest równa

$$\omega|_{\{x^i=b^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \dots, b^i, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k$$

a do ściany $\{x^i = a^i\}$

$$\omega|_{\{x^i=a^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \dots, a^i, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k$$

Orientacja ściany $\{x^i = b_i\}$ indukowana przez orientację kanoniczną $\mathbb{R}^n$ jest to orientacja zgodna z

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \quad (10)$$

jeśli i jest nieparzyste a przeciwna gdy i parzyste. Odwrotnie jest na ścianie $\{x^i = b_i\}$: orientacja indukowana jest zgodna z (10) jeśli i parzyste i przeciwna jeśli i nieparzyste. Można więc napisać, że

$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^{i+1} \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial \iota)} (\omega_i) dx^1 \wedge \dots \text{bez } i \dots \wedge dx^n$$

i

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^i \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial \iota)} (\omega_i) dx^1 \wedge \dots \text{bez } i \dots \wedge dx^n$$

i dalej

$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^{i+1} \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial \iota)} (-1)^{i+1} \omega = \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial \iota)} \omega,$$

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^i \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial \iota)} (-1)^{i+1} \omega = - \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial \iota)} \omega.$$

Możemy zatem kontynuować pierwotny rachunek

$$= \sum_{i=1}^n \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial \iota)} \omega + \sum_{i=1}^n \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial \iota)} \omega = \int_{(\partial D, \partial \iota)} \omega.$$

Twierdzenie Stokes'a na kostce zostało zatem udowodnione. Z bardziej skomplikowanymi obszarami poradzimy sobie używając rozkładu jedności: