

Dowód: Niech M będzie jak w założeniach twierdzenia. Weźmy skończony atlas $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ na M zgodny z orientacją. Zbiór indeksów I może być skończony, gdyż rozmaitość M jest zwarta. $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ oznaczać będzie odpowiedni atlas na ∂M . Korzystać będziemy także ze związanego z pokryciem $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ rozkładu jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$. Zauważmy najpierw, że

$$d\omega = d(1 \cdot \omega) = d\left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right)\omega\right) = \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega).$$

Z drugiej jednak strony

$$d\left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right)\omega\right) = d\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) \wedge \omega + \left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) d\omega = 0 + \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega).$$

Podsumowując, skoro zachodzi równość form

$$d\omega = \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega) = \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega),$$

to zachodzi także równość całek

$$I = \int_{(M, \nu)} d\omega = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega) = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega).$$

Zajmiemy się środkowym wyrażeniem

$$I = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega) = \sum_{i \in I} \int_{(M, \nu)} d(\alpha_i \omega).$$

Każda z form $\alpha_i \omega$ ma nośnik w $\mathcal{O}_i$, podobnie $d(\alpha_i \omega)$, całkę można więc zapisać w i -tym układzie współrzędnych.

$$I = \sum_{i \in I} \int_{(\mathcal{O}_i, \nu)} d(\alpha_i \omega).$$

$\alpha_i \omega$ jest $(n-1)$ -formą, więc ma postać

$$\alpha_i \omega = \sum_{k=1}^n f_i(x_i^1, \dots, x_i^n) dx_i^1 \wedge \dots (\text{bez } k) \dots \wedge dx_i^n.$$

$$d(\alpha_i \omega) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n$$

Z definicji całki z formy otrzymujemy

$$\int_{(\mathcal{O}_i, \nu)} d(\alpha_i \omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \dots dx_i^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \dots dx_i^n =$$

Korzystamy z twierdzenia Fubiniego

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathcal{D}_k} dx_i^1 \dots (\text{bez } k) \dots dx_i^n \int_{a^k(x)}^{b^k(x)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^k =$$

Obszar $\mathcal{D}_k$ oraz granice całkowania $a^k(x)$, $b^k(x)$ są dobrane jak w twierdzeniu Fubiniego, a zależność od x wskazuje na zależność granic od punktu w $\mathcal{D}_k$.

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathcal{D}_k} dx_i^1 \dots (\text{bez } k) \dots dx_i^n \left(f_i(x^1, \dots, b^k(x), \dots, x^n) - f_i(x^1, \dots, a^k(x), \dots, x^n) \right)$$

Jeśli $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$, wtedy wartości funkcji f_i w punktach granicznych są równe zero, gdyż nośnik f_i zawiera się w $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$. Do całki wkład dają więc tylko te układy współrzędnych, które są brzegowe, tzn. $\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap \Pi \neq \emptyset$. Taki układ współrzędnych ma szczególną postać, tzn. wyróżniona jest w nim pierwsza współrzędna. Wkład do całki daje jedynie składnik z $k = 1$, gdyż w pozostałych punktach granicznych f_i także jest zero. Dla $k = 1$ granica górna całkowania $b^1(x) = 0$. W granicy dolnej także funkcja f_i znika. Całka taka ma postać

$$\int_{(\mathcal{O}_i, \iota)} d(\alpha_i \omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap \Pi} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n.$$

Zgodnie z definicją całki na rozmaitości

$$\sum_{i \in I} \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = \int_{(\partial M, \partial_i)} \omega,$$

gdyż $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)$ stanowi atlas na ∂M zgodny z orientacją a obcięcie (α_i) do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu. $\square$

5.5 Operatory różniczkowe na rozmaitości z brzegiem

W trakcie tego wykładu dyskutować będziemy obiekty, które zdefiniować można na rozmaitości M wyposażonej w strukturę metryczną g . Szczególną uwagę zwrócimy na klasyczne wersje Twierdzenia Stokesa w analizie wektorowej. Rozmaitość M z metryką g nazywana jest *rozmaitością Riemanna*. Tensor metryczny g jest cięciem wiązki tensorowej $T^*M \otimes T^*M \rightarrow M$ o tej własności, że w każdym punkcie $q \in M$, g_q jest niezdegenerowaną, dwuliniową symetryczną formą na przestrzeni stycznej, dodatnio-określoną. Innymi słowy g_q zadaje na TM iloczyn skalarny.

Przypomnijmy sobie kilka faktów algebraicznych. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie-wymiarową a g iloczynem skalarnym określonym na tej przestrzeni. Iloczyn skalarny definiuje odwzorowanie

$$G : V \rightarrow V^*, \quad G(v) = g(v, \cdot).$$

Fakt, że iloczyn skalarny jest symetryczny powoduje, że odwzorowanie G jest samosprężone. Fakt, że iloczyn skalarny jest niezdegenerowany powoduje, że G jest izomorfizmem liniowym. Dodatkowym obiektem związanym z iloczynem skalarnym jest forma kwadratowa $\tilde{g}$, która służy do definiowania długości wektora:

$$\tilde{g}(v) = g(v, v), \quad \|v\| = \sqrt{\tilde{g}(v)}.$$

My pracować będziemy głównie z g i G . Jeśli w V wybierzemy bazę $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ iloczyn skalarny oraz odpowiedni samosprężony izomorfizm przedstawić możemy przy pomocy macierzy. Macierz formy g w bazie e oznaczamy zazwyczaj $[g]_e$. Dla wygody będziemy także używać

oznaczenia $\mathcal{G}_e$. Będziemy także pomijać symbol bazy, jeśli będzie jasne jakiej bazy używamy. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ mają postać

$$\mathcal{G}_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Zwróćmy uwagę na położenie indeksów, które, jakkolwiek *historyczne*, ma jednak uzasadnienie. Tradycyjnie indeksy przy współrzędnych wektora piszemy na górze oraz sumujemy po powtarzających się indeksach górnym i dolnym. W tej sytuacji, jeśli $v = v^i e_i$ oraz $w = w^i e_i$ to

$$g(v, w) = \mathcal{G}_{ij} v^i w^j$$

albo

$$g(v, w) = ([v]^e)^T \mathcal{G}_e [w]^e.$$

Jeśli $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ oznacza bazę dualną do e to

$$G(v) = \mathcal{G}_{ij} v^i \varepsilon^j \in V^*.$$

Zapisać też można

$$g = \mathcal{G}_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j.$$

Zamiana bazy w macierzy formy dwuliniowej odbywa się według wzoru

$$\mathcal{G}_f = Q^T \mathcal{G}_e Q,$$

gdzie Q jest macierzą odwzorowania identycznościowego na V zapisanego w bazach f i e , dokładniej

$$Q = [id_V]^e_f.$$

Zamieniając bazę w macierzy odwzorowania używamy macierzy przejścia wzajemnie odwrotnych. Tu obkładamy wyjściową macierz macierzą przejścia i do niej transponowaną. Odzwierciedla to charakter macierzy $\mathcal{G}$. Jest to oczywiście także kwadratowa tabelka liczb, ale funkcjonująca inaczej niż zwykła macierz odwzorowania.

Tensor metryczny na rozmaitości zadaje powyżej opisaną strukturę punkt po punkcie na przestrzeniach stycznych i kostycznych. Mamy więc iloczyn skalarny g na każdej z przestrzeni stycznych, możemy liczyć długości wektorów stycznych oraz dysponujemy izomorfizmem samosprzężonym

$$G : TM \longrightarrow T^*M.$$

Izomorfizm ten pozwala utożsamiać wektory z kowektorami, co jest wykorzystywane w teoriach fizycznych, choć zazwyczaj pomijane milczeniem jako oczywiste. Mając do dyspozycji lokalny układ współrzędnych $(\mathcal{O}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ mamy także w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej i przestrzeni kostycznej. Możemy zatem używać macierzy związanej z tensorem metrycznym. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ są teraz nie liczbami a funkcjami gładkimi na M . Załóżmy ponadto, że rozmaitość M jest orientowalna oraz że wybrano na niej orientację ι . Orientowalność wiąże się z istnieniem nieznikających n -form nazywanych formami objętości. Istnienie tensora metrycznego i wybranej orientacji pozwala zdefiniować w kanoniczny sposób formę objętości związaną z metryką. Jeśli układ współrzędnych jest zgodny z orientacją, to metryczna forma objętości Ω ma postać

$$\Omega = \sqrt{\det \mathcal{G}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Struktura metryczna i orientacja pozwala utożsamiać pola wektorowe i jednoformy oraz pola wektorowe i $n - 1$ formy. Jeśli X jest polem wektorowym na M , to $G \circ X$ jest jednoformą a $i_X \Omega$ jest $(n - 1)$ -formą.

Gradient: Gradient jest polem wektorowym odpowiadającym różniczce funkcji. Jeśli f jest funkcją gładką na M

$$\text{grad } f = G^{-1} \circ \text{d}f.$$

Definicja ta jest niezależna od współrzędnych. Pozwala jednak w łatwy sposób zapisywać gradient w dowolnych współrzędnych bez uciążliwego zamieniania zmiennych w operatorach różniczkowych. Prawidłowa definicja gradientu pozwala także odpowiedzieć na pytanie, *czy dane pole wektorowe X jest gradientem funkcji, tzn. czy ma potencjał skłarny*. Pole mające potencjał skłarny odpowiada jednoformie, która jest różniczką, zatem jej różniczka musi być zero. Warunkiem koniecznym potencjalności pola jest więc, aby

$$\text{d}(G \circ X) = 0.$$

Istnienie bądź nieistnienie potencjału zależy już dalej od kształtu obszaru, jak w Lemacie Poincarè.

Rotacja: Na trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości z metryką zdefiniować można rotację pola wektorowego ($\text{rot } A$) następującym wzorem

$$\text{d}(G \circ A) = \iota_{\text{rot } A} \Omega.$$

Sprawdźmy, że na $\mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skłarnym i kanoniczną orientacją otrzymamy znane nam już wzory na rotację pola wektorowego w kartezjańskim układzie współrzędnych. Niech

$$A = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Korzystając z faktu, że kanoniczne współrzędne w $\mathbb{R}^3$ są ortonormalne otrzymujemy

$$G \circ A = A_x \text{d}x + A_y \text{d}y + A_z \text{d}z.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{d}(G \circ A) &= \frac{\partial A_x}{\partial y} \text{d}y \wedge \text{d}x + \frac{\partial A_x}{\partial z} \text{d}z \wedge \text{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial x} \text{d}x \wedge \text{d}y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \text{d}z \wedge \text{d}y + \frac{\partial A_z}{\partial x} \text{d}x \wedge \text{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \text{d}y \wedge \text{d}z = \\ &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \text{d}x \wedge \text{d}y + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \text{d}y \wedge \text{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \text{d}z \wedge \text{d}x \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz $B = \text{rot } A$. Forma objętości w kanonicznych współrzędnych to $\Omega = \text{d}x \wedge \text{d}y \wedge \text{d}z$. Mamy zatem

$$\iota_B \Omega = B_x \text{d}y \wedge \text{d}z + B_y \text{d}z \wedge \text{d}x + B_z \text{d}x \wedge \text{d}y$$

i z porównania obu wzorów otrzymujemy

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

co zgadza się z tradycyjnym wzorem na rotację. Zaletą naszej definicji jest, że możemy teraz zapisać rotację w dowolnym układzie współrzędnych nie dokonując uciążliwej zamiany zmiennych.

Fakt 9

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0.$$

Dowód:

$$\iota_{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f} \Omega = d(G \circ \operatorname{grad} f) = d(G \circ G^{-1} \circ df) = dd f = 0.$$

Zwężenie w formą objętości jest równe zero jedynie dla pola zerowego, zatem istotnie $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$. $\square$

Powyższy fakt wskazuje, że jedną z metod sprawdzania potencjalności pola jest obliczenie jego rotacji. Fakt, iż rotacja gradientu znika, wynika ze znikania drugiej różniczki.

Dywergencja: Na metrycznej orientowalnej rozmaitości dowolnego wymiaru zdefiniować można dywergencję pola wektorowego wzorem

$$(\operatorname{div} X)\Omega = d(\iota_X \Omega).$$

Dywergencja nie zależy od orientacji względem której wybrana jest forma objętości Ω , gdyż pojawia się ona po obydwu stronach równania. Ewentualna zmiana znaku odbywa się jednocześnie po obu stronach równania. W kartezjańskim układzie współrzędnych łatwo jest wypisać dywergencję:

$$\begin{aligned} d(\iota_X \Omega) &= d(X_x dy \wedge dz + X_y dz \wedge dx + X_z dx \wedge dy) = \\ &= \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Także i w tym przypadku bardzo łatwo jest wypisać dywergencję w innym układzie współrzędnych korzystając z definicji a nie z procedury zamiany zmiennych.

Fakt 10

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} X = 0$$

Dowód:

$$(\operatorname{div} \operatorname{rot} X)\Omega = d(\iota_{\operatorname{rot} X} \Omega) = d(d(G \circ X)) = 0$$

$\square$

Laplasjan: Uogólnieniem znanego z $\mathbb{R}^n$ operatora Laplace'a na rozmaitości (pseudo)Riemanna jest operator Laplace'a-Beltramiego. Jest to operator różniczkowy drugiego rzędu działający na funkcjach, dokładniej

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Znając już postać gradientu i dywergencji we współrzędnych kartezjańskich na $\mathbb{R}^3$ możemy łatwo zapisać laplasjan:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Zapiszmy teraz laplasjan we współrzędnych sferycznych. Zrobimy cały rachunek od początku, żeby pokazać jego efektywność w porównaniu z tradycyjną w takich okolicznościach zamianą zmiennych. Zależność między współrzędnymi kartezjańskimi i sferycznymi w $\mathbb{R}^2$ ma postać:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$z = r \cos \vartheta$$

Korzystając z powyższych związków wyznaczamy wektory $\partial_r, \partial_\varphi, \partial_\vartheta$:

$$\partial_r = \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial_y + \frac{\partial z}{\partial r} \partial_z = \cos \varphi \sin \vartheta \partial_x + \sin \varphi \sin \vartheta \partial_y + \cos \vartheta \partial_z$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \partial_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \partial_z = -r \sin \varphi \sin \vartheta \partial_x + r \cos \varphi \sin \vartheta \partial_y$$

$$\partial_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \partial_y + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \partial_z = r \cos \varphi \cos \vartheta \partial_x + r \sin \varphi \cos \vartheta \partial_y - r \sin \vartheta \partial_z.$$

Wiadomo, że baza $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ jest bazą ortonormalną względem kanonicznej metryki na $\mathbb{R}^3$ wyznaczamy elementy macierzowe macierzy $\mathcal{G}$ we współrzędnych sferycznych:

$$(\partial_r | \partial_r) = \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$$

$$(\partial_\varphi | \partial_\varphi) = r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta = r^2 \sin^2 \vartheta$$

$$(\partial_\vartheta | \partial_\vartheta) = r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta = r^2 \cos^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta = r^2$$

$$(\partial_r | \partial_\vartheta) = (\partial_\varphi | \partial_\vartheta) = (\partial_r | \partial_\varphi) = 0,$$

zatem macierz iloczynu skalarnego w bazie $(\partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\varphi)$ i macierz odwrotna mają postać

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy formę objętości we współrzędnych sferycznych

$$\Omega = r^2 \sin \vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi.$$

Wykonujemy niezbędne rachunki

$$\text{grad } f = G^{-1} \circ df = \frac{\partial f}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \partial_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \partial_\varphi$$

$$\iota_{\text{grad } f} \Omega = r^2 \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial r} d\vartheta \wedge d\varphi - \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} dr \wedge d\varphi + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} dr \wedge d\vartheta.$$

$$\begin{aligned} d(\iota_{\text{grad } f} \Omega) &= d \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial r} d\vartheta \wedge d\varphi - \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} dr \wedge d\varphi + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} dr \wedge d\vartheta \right) \\ &= \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \sin \vartheta \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right] dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\text{ctg } \vartheta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right] r^2 \sin \vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

5.6 Klasyczne wersje Twierdzenia Stokes'a

Odpowiedniość między polami wektorowymi i jednoformami lub $(n-1)$ -formami pozwala zinterpretować poniższe klasyczne wzory analizy wektorowej jako wersje Twierdzenia Stokes'a:

$$(i) \int_S (\vec{n} | \operatorname{rot} X) d\sigma = \int_{\partial S} (\vec{t} | X) d\ell \quad (ii) \int_D \operatorname{div} X dv = \int_{\partial D} (\vec{n} | X) d\sigma.$$

Analizując powyższe wzory używać powinniśmy pojęcia gęstości, która odpowiada tradycyjnemu „elementowi objętości” dv , „elementowi powierzchni” $d\sigma$ czy „elementowi długości” $d\ell$. Nie dyskutowaliśmy jednak form nieparzystych oraz gęstości, dlatego posłużymy się dotychczas wprowadzonym językiem. Na potrzeby wzoru (i) założyć trzeba, że S jest dwuwymiarową zwartą powierzchnią z brzegiem zanurzoną w trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości M z metryką. Na potrzeby wzoru (ii) założyć należy, że D jest n -wymiarową zwartą rozmaitością z brzegiem zanurzoną w n -wymiarowej zorientowanej rozmaitości M . Zajmiemy się najpierw wzorem (ii). W naszym języku „element objętości” to forma objętości zgodna z orientacją i związana z metryką, zatem napisać możemy

$$\int_D \operatorname{div} X dv = \int_{(D, \iota)} (\operatorname{div} X) \Omega =$$

i dalej idzie samo

$$= \int_{(D, \iota)} d(\iota_X \Omega) = \int_{(\partial D, \partial \iota)} \iota_X \Omega =$$

Korzystając z układów współrzędnych typu opisanego w definicji rozmaitości z brzegiem oraz ze stosownego rozkładu jedności napisać można ciąg dalszy rachunku w postaci

$$= \sum_{i \in I} \int_{(\tilde{\mathcal{O}}_i, +)} X_i^1 \sqrt{\det \mathcal{G}_i} dx_i^2 \wedge \cdots \wedge dx_i^n.$$

W powyższym wzorze całkujemy po dziedzinie układu współrzędnych $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \dots, x_i^n)$ na brzegu z orientacją zgodną z kolejnością współrzędnych $(x^2, \dots, x^n)$. X_i^1 jest pierwszą współrzędną pola wektorowego w układzie współrzędnych $\varphi = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$ zaś $\mathcal{G}_i$ to macierz iloczynu skalarnego wyrażona w bazie związanej z układem współrzędnych. Po prawej stronie równości (ii) $d\sigma$ odpowiada formie objętości na brzegu zapisanej dla metryki g obciętej do brzegu. W układzie współrzędnych $\tilde{\varphi}$ forma ta ma postać $\sqrt{\det \mathcal{S}_i} dx_i^2 \wedge \cdots \wedge dx_i^n$. Macierz $\mathcal{S}_i$ jest podmacierzą macierzy $\mathcal{G}_i$ odpowiadającą współrzędnym od 2 wzwyż, tzn

$$\mathcal{G}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{12} & & & \\ \vdots & & \mathcal{S}_i & \\ \mathcal{G}_{1n} & & & \end{array} \right]$$

Poszukajmy teraz wektora normalnego do powierzchni ∂D skierowanego „na zewnątrz”. Niech $\vec{n} = \alpha^k \partial_k$ (dla uproszczenia notacji wektor $\frac{\partial}{\partial x^k}$ oznaczać będziemy ∂_k . Pomijać także będziemy