

Ostatecznie

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

5.6 Klasyczne wersje Twierdzenia Stokes'a

Odpowiedniość między polami wektorowymi i jednoformami lub $(n-1)$ -formami pozwala zinterpretować poniższe klasyczne wzory analizy wektorowej jako wersje Twierdzenia Stokes'a:

$$(i) \int_S (\vec{n} | \operatorname{rot} X) d\sigma = \int_{\partial S} (\vec{t} | X) d\ell \quad (ii) \int_D \operatorname{div} X dv = \int_{\partial D} (\vec{n} | X) d\sigma.$$

Analizując wzory (i) i (ii) używać powinniśmy pojęcia gęstości, która odpowiada tradycyjnemu „elementowi objętości” dv , „elementowi powierzchni” $d\sigma$ czy „elementowi długości” $d\ell$. Nie dyskutowaliśmy jednak form nieparzystych oraz gęstości, dlatego posłużymy się dotychczas wprowadzonym językiem. Na potrzeby wzoru (i) założyć trzeba, że S jest dwuwymiarową zwartą powierzchnią z brzegiem zanurzoną w trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości M z metryką. Na potrzeby wzoru (ii) założyć należy, że D jest n -wymiarową zwartą rozmaitością z brzegiem zanurzoną w n -wymiarowej zorientowanej rozmaitości M . Zajmiemy się najpierw wzorem (ii). W naszym języku „element objętości” to forma objętości zgodna z orientacją i związana z metryką, zatem napisać możemy

$$\int_D \operatorname{div} X dv = \int_{(D, \iota)} (\operatorname{div} X) \Omega =$$

Dalej używamy definicji dywergencji i stosujemy twierdzenie Stokes'a

$$= \int_{(D, \iota)} d(\iota_X \Omega) = \int_{(\partial D, \partial \iota)} \iota_X \Omega =$$

Korzystając z układów współrzędnych typu opisanego w definicji rozmaitości z brzegiem oraz ze stosownego rozkładu jedności na brzegu ∂D $(\tilde{\alpha}_i)_{i \in I}$, rachunek możemy kontynuować następująco

$$= \sum_{i \in I} \int_{(\tilde{\mathcal{O}}_i, +)} \tilde{\alpha}_i X_i^1 \sqrt{\det \mathcal{G}_i} dx_i^2 \wedge \cdots \wedge dx_i^n. \quad (11)$$

W powyższym wzorze całkujemy po dziedzinie układu współrzędnych $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \dots, x_i^n)$ na brzegu z orientacją zgodną z kolejnością współrzędnych $(x^2, \dots, x^n)$. X_i^1 jest pierwszą współrzedną pola wektorowego w układzie współrzędnych $\varphi = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$ zaś $\mathcal{G}_i$ to macierz iloczynu skalarnego wyrażona w bazie związanej z układem współrzędnych. Po prawej stronie równości (ii) $d\sigma$ odpowiada formie objętości na brzegu zapisanej dla metryki g obciętej do brzegu. W układzie współrzędnych $\tilde{\varphi}$ forma ta ma postać $\sqrt{\det \mathcal{S}_i} dx_i^2 \wedge \cdots \wedge dx_i^n$. Macierz $\mathcal{S}_i$ jest podmacierzą macierzy $\mathcal{G}_i$ odpowiadającą współrzednym od 2 wzwyż, tzn.

$$\mathcal{G}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{12} & & & \\ \vdots & & \mathcal{S}_i & \\ \mathcal{G}_{1n} & & & \end{array} \right]$$

Poszukajmy teraz wektora normalnego do powierzchni ∂D skierowanego „na zewnątrz”. Niech $\vec{n} = a^k \partial_k$ (dla uproszczenia notacji wektor $\frac{\partial}{\partial x^k}$ oznaczać będziemy ∂_k . Pomijając także będziemy indeks numerujący układy współrzędnych. Warunek „skierowania na zewnątrz” oznacza, że $a^1 > 0$. Wektor $\vec{n}$ ma być prostopadły do ∂_j dla $j > 1$, czyli

$$0 = g(\vec{n}, \partial_j) = \mathcal{G}_{ik} a^i \delta_j^k = \mathcal{G}_{ij} a^i \quad j > 1. \quad (12)$$

Jednocześnie wektor $\vec{n}$ ma być długości 1, czyli

$$1 = g(\vec{n}, \vec{n}) = \mathcal{G}_{ij} a^i a^j = \sum_j \left(\sum_i \mathcal{G}_{ij} a^i \right) a^j = \sum_i \mathcal{G}_{i1} a^i a^1. \quad (13)$$

Wyrażenia (12) i (13) można razem zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \cdots & \mathcal{G}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{n1} & \mathcal{G}_{n2} & \cdots & \mathcal{G}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Macierz $\mathcal{G}$ jest odwracalna. Wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej oznaczamy tradycyjnie $\mathcal{G}^{ij}$. Używając macierzy odwrotnej rozwiążemy równanie (14).

$$a^1 = \mathcal{G}^{1j} \delta_j^1 / a^1 \implies a^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}.$$

$$a^j = \mathcal{G}^{jk} \delta_k^1 / a^1 \implies a^j = \mathcal{G}^{j1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}, \quad j > 1$$

Obliczmy teraz $g(\vec{n}, X)$

$$g(\vec{n}, X) = \mathcal{G}_{ij} a^i X^j = \mathcal{G}_{i1} a^i X^1 = X^1 \mathcal{G}_{i1} \mathcal{G}^{i1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}} = X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}.$$

Po prawej stronie wzoru (ii) we współrzędnych mamy więc (składanik pochodzący od jednego układu współrzędnych)

$$\int_{(\vec{0}, +)} \alpha(X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}) \sqrt{\det \mathcal{S}} dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (15)$$

Potrzebujemy związek między $\det \mathcal{G}$ a $\det \mathcal{S}$. W tym celu rozważmy przejście od bazy $e = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ do bazy $f = (\vec{n}, \partial_2, \dots, \partial_n)$. Macierz przejścia $[id]_f^e$ ma postać

$$[id]_f^e = \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz iloczynu skalarnego w bazie f to

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array} \right],$$

a operacja zmiany bazy daje

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]^T \mathcal{G} \left[\begin{array}{ccccc} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right].$$

Liczmy wyznacznik

$$\det \mathcal{S} = (a^1)^2 \det \mathcal{G}$$

i pierwiastek

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = a^1 \sqrt{\det \mathcal{G}}$$

ale $a^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}$, zatem

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = \sqrt{\mathcal{G}^{11}} \sqrt{\det \mathcal{G}}$$

Po podstawieniu powyższego związku do (15) prawa strona (ii) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} \alpha(X^1/\sqrt{\mathcal{G}^{11}}) \sqrt{\det \mathcal{S}} \, dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\ \int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} \alpha(X^1/\sqrt{\mathcal{G}^{11}}) \sqrt{\mathcal{G}^{11}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \, dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\ \int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} \alpha X^1 \sqrt{\det \mathcal{G}} \, dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

i jest równa lewej stronie (11).

Zajmiemy się teraz wzorem (i). Analizując (ii) ustaliliśmy, że całka

$$\int_{\partial D} (\vec{n}|X) d\sigma = \int_{\partial D} \iota_X \Omega.$$

Skorzystamy z tego przekształcając lewą stronę (i):

$$\int_S (\vec{n}|\text{rot } X) d\sigma = \int_S \iota_{\text{rot } X} \Omega = \int_S d(G \circ X) = \int_{\partial S} G \circ X. \quad (16)$$

Zapiszmy teraz formę pod całką w układzie współrzędnych

$$G \circ X = \mathcal{G}_{ij} X^i dx^j$$

Jeśli

$$I \ni r \mapsto (x^1(r), x^2(r), x^3(r)) \in \partial S$$

jest parametryzacją brzegu ∂S to

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij}(r) X^i(r) \dot{x}^j dr$$

Jednostkowy wektor styczny to

$$\vec{t} = \frac{1}{\|\partial r\|} \partial_r$$

natomiast

$$\partial_r = \dot{x}^1 \partial_1 + \dot{x}^2 \partial_2 + \dot{x}^3 \partial_3.$$

Iloczyn skalarny pod całką można zapisać jako

$$\mathcal{G}_{ij} X^i \dot{x}^j = g(X, \partial_r) = g(X, \vec{t}) \|\partial_r\|.$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę, że

$$d\ell = \|\partial_r\| dr$$

rachunek (16) można kontynuować

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij} X^i \dot{x}^j dr = \int_I (X|\vec{t}) \|\partial_r\| dr = \int_{\partial S} (X|\vec{t}) d\ell.$$

□

5.7 Gwiazdka Hodge'a

W bardzo podobny sposób do tego, w jaki definiowaliśmy wieloformy na przestrzeni wektorowej, zdefiniować można wielowektory. Skorzystamy tu z prawdziwego dla skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych faktu iż $(V^*)^*$ jest kanonicznie izomorficzna z V . Możemy zamienić rolami V i V^* traktując V jako zbiór funkcji liniowych na V^* i rozważać także zbiór funkcji wieloliniowych antysymetrycznych na V^* , czyli $\wedge^k V$. Swój odpowiednik wektorowy ma też konstrukcja iloczynu zewnętrznego. W języku tensorowym mamy

$$v \wedge w = w \otimes v - v \otimes w$$

oraz

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Ponieważ $(V \otimes V)^* \simeq V^* \otimes V^*$ możemy obliczyć $\alpha \wedge \beta$ na $v \wedge w$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge \beta, v \wedge w \rangle &= \langle \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha, v \otimes w - w \otimes v \rangle = \\ &= \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) - \beta(v)\alpha(w) + \beta(w)\alpha(v) = 2[\alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)] \end{aligned}$$

i ogólnie

$$\langle \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle = k! \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}).$$

Oznacza to, że jeśli e i ϵ są parą baz dualnych w V i V^* to układy $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \epsilon^{j_1} \wedge \epsilon^{j_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{j_k}$ dla $i_1 < i_2 < \cdots < i_k, j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ prawie są parą baz dualnych. Prawie, bo gdzieś trzeba podzielić przez $k!$. Mając iloczyn skalarny g na V możemy utożsamiać wektory z kowektorami przy pomocy izomorfizmu G . Iloczyn skalarny możemy wprowadzić także na V^* :

$$g(v, w) = (v|w) = \langle G(v), w \rangle = \mathcal{G}_{ij} v^i w^j \quad \tilde{g}(\alpha, \beta) = (\alpha|\beta) = \langle \alpha, G^{-1}(\beta) \rangle = \mathcal{G}^{ij} \alpha_i \beta_j$$

Zgodnie z konwencją, $\mathcal{G}^{ij}$ to wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej do $\mathcal{G}$. Izomorfizmy G i G^{-1} możemy rozszerzyć na dowolne iloczyny tensorowe. Na przykład jeśli $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ to $G^{-1}(\alpha \otimes \beta) = G^{-1}(\alpha) \otimes G^{-1}(\beta) \in V \otimes V$. Zakładając, że rozszerzenie jest liniowe otrzymujemy

$$G^{-1}(\alpha_{i_1 i_2} \dots i_k \epsilon^{i_1} \otimes \epsilon^{i_2} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_k}) = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathcal{G}^{i_1 j_1} \mathcal{G}^{i_2 j_2} \dots \mathcal{G}^{i_k j_k} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_k}.$$

Korzystając z rozszerzenia G i G^{-1} definiujemy iloczyn skalarny na przestrzeni k -form $\bigwedge^k V^*$ wzorem

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^k | \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \dots \wedge \beta^k) = \frac{1}{k!} \langle G^{-1}(\alpha^1) \wedge G^{-1}(\alpha^2) \wedge \dots \wedge G^{-1}(\alpha^k), \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \dots \wedge \beta^k \rangle,$$

na dowolne wieloformy (niekoniecznie proste) rozszerzamy poprzez warunek liniowości.



Rys. 34: Sir William Vallance Douglas Hodge.

Gwiazdka Hodge'a: Na rozmaitości M z metryką g mamy iloczyn skalarny na każdej przestrzeni stycznej, zatem wszystko o czym była mowa powyżej prawdziwe jest punkt po punkcie. Jeśli dodatkowo rozmaitość jest zorientowana i w związku z tym wyposażona w kanoniczną formę objętości, zdefiniować można przydatne odwzorowanie

$$* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

wzorem

$$*\alpha = \frac{1}{k!} \iota_{G^{-1}(\alpha)} \Omega.$$

Mamy tu do czynienia z pewną kolizją oznaczeń: Ω^k oznacza zbiór k -form na M i jednocześnie Ω jest formą objętości. Myślę jednak, że damy radę odróżniać o którą „omegę” kiedy chodzi.

Sprawdźmy najpierw jak nasza definicja działa w praktyce. Zaczniemy od najprostszego przypadku: $M = \mathbb{R}^3$, orientacja kanoniczna, iloczyn skalarny kanoniczny, $\mathcal{G} = \mathbf{1}$, $\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

$$*dx^1 = \iota_{G^{-1}(dx^1)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^2 \wedge dx^3$$

$$*dx^2 = \iota_{G^{-1}(dx^2)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^1 \wedge dx^3$$

$$*dx^3 = \iota_{G^{-1}(dx^3)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 \wedge dx^2$$

$$*(dx^1 \wedge dx^2) = \frac{1}{2} \iota_{G^{-1}(dx^1 \wedge dx^2)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_1 \wedge \partial_2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx^3$$

Popatrzmy teraz na rachunki w układzie sferycznym:

$$\Omega = r^2 \sin \vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}.$$

$$*dr = \iota_{\partial_r} \Omega = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \wedge d\varphi$$

$$*d\vartheta = \iota_{\frac{1}{r^2} \partial_r} \Omega = \frac{1}{r^2} \iota_{\partial_r} \Omega = -\sin \vartheta \, dr \wedge d\varphi$$

$$*d\varphi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \iota_{\partial_\varphi} \Omega = \frac{1}{\sin \vartheta} dr \wedge d\vartheta$$

$$*dr \wedge d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \iota_{\partial_r \wedge \partial_\vartheta} \Omega = \sin \vartheta \, d\varphi$$

Zauważmy, że

$$**dx^1 = *dx^2 \wedge dx^3 = dx^1, \quad **dr \wedge d\varphi = * \left(-\frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \right) = dr \wedge d\varphi$$

Z drugiej strony na $\mathbb{R}^2$

$$*dx^1 = dx^2, \quad *dx^2 = -dx^1, \quad **dx^1 = *dx^2 = -dx^1.$$

Wydaje się więc, że złożenie $**$ jest równe identyczności z dokładnością do znaku. Znak ten musi mieć coś wspólnego z rzędem formy i wymiarem przestrzeni.

Fakt 11 *Zachodzą następujące równości*

$$1. \quad *1 = \Omega$$

$$2. \quad *\Omega = 1$$

$$3. \quad **\alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha, \quad \alpha \in \Omega^k(M)$$

$$4. \quad \alpha \wedge *\beta = (\alpha|\beta)\Omega \quad \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

Dowód: Zauważmy, że $*$ jest operacją punktową, zatem można wybrać wygodny układ współrzędnych. W tym przypadku jest to taki układ współrzędnych, dla którego w ustalonym punkcie baza $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ jest ortonormalna. Pracować będziemy w takim układzie współrzędnych.

Wtedy $G^{-1}(\mathbf{d}x^i) = \partial_i$. Zaczynamy od dowodu punktu (3). Każda k -forma jest kombinacją liniową form bazowych $\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}$ z funkcyjnymi współczynnikami. $*$ jest liniowa nad funkcjami, więc można sprawdzić tylko na formach bazowych. Załóżmy, że $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$

$$*\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k} = \frac{1}{k!} \iota_{\partial_{i_1} \wedge \partial_{i_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}} \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n = \operatorname{sgn} \sigma \mathbf{d}x^{i_{k+1}} \wedge \mathbf{d}x^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_n},$$

gdzie $i_{k+1} < i_{k+2} < \cdots < i_n$ oraz σ jest permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Aplikujemy $*$ drugi raz

$$\begin{aligned} * *\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k} &= * \operatorname{sgn} \sigma \mathbf{d}x^{i_{k+1}} \wedge \mathbf{d}x^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_n} = \\ &= \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}. \end{aligned}$$

Permutacja ρ ma postać

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \cdots & i_n & i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

Pozostaje do obliczenia $\operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho$: Pamiętając, że znak jest homomorfizmem grupy permutacji w grupę $\{-1, 1\}$ z mnożeniem zauważamy, że

$$\operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \rho \operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \rho \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} (\rho \circ \sigma^{-1})$$

Ostatnie złożenie jest permutacją

$$\rho \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-n} & i_{k-n+1} & \cdots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \cdots & i_n & i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

której znak jest równy $(-1)^{k(n-k)}$. Dla dowodu punktu (2) zauważmy, że $G^{-1}(\Omega) = \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \cdots \wedge \partial_n$, dalej

$$*\Omega = \frac{1}{n!} \iota(\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \cdots \wedge \partial_n) \Omega = \frac{1}{n!} n! = 1$$

Punkt (1) wynika z (3) i (2), a właściwie jest jedyną sensowną definicją gwiazdki zero-formy, która pasuje do pozostałych wzorów. W punkcie (4) zauważmy, że obie strony są dwuliniowe, można więc sprawdzać na formach bazowych. Niech więc $\alpha = \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}$ i $\beta = \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \mathbf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{j_k}$. Forma $*\beta$ jest, z dokładnością do znaku, iloczynem zewnętrznym różniczek $\mathbf{d}x^{j_{k+1}} \wedge \mathbf{d}x^{j_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{j_n}$, gdzie $\{j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. W tej sytuacji $\alpha \wedge *\beta$ jest różna od zera jedynie gdy $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$. Jeśli dodatkowo założymy naturalne uporządkowanie indeksów oznacza to, że $i_l = j_l$ dla $l = 1, \dots, k$ and $\alpha = \beta$. Podobnie $(\alpha | \beta)$ jest różna od zera jedynie gdy $\alpha = \beta$, gdyż

$$(\alpha | \beta) = \frac{1}{k!} \iota_{\partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}} \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \mathbf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{j_k}$$

Ostatecznie, gdy $\alpha = \beta$ prawa strona to

$$(\alpha | \alpha) \Omega = \Omega$$

a lewa

$$\alpha \wedge * \alpha = \operatorname{sgn} \sigma \, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} = (\operatorname{sgn} \sigma)^2 \Omega.$$

Dla porządku zapiszmy, że σ jest permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

□

6 Różniczkowanie pól i form

W geometrii różniczkowej interesuje nas często jak dane pole tensorowe zmienia się od punktu do punktu na rozmaitości. A właściwie częściej chodzi o to, czy są jakieś kierunki w których się nie zmienia. Tu jednak napotykamy na pierwszą pojęciową trudność: zazwyczaj nie wiadomo jak porównywać wartości rozmaitych pól (pól wektorowych, form różniczkowych...) w różnych punktach na rozmaitości. Możemy porównywać wartości funkcji w różnych punktach, ale nie możemy porównywać wartości pola wektorowego w różnych punktach. Wiadomo co to znaczy „funkcja f jest stała na M ”, ale nie wiadomo co to jest stałe pole wektorowe. Na przykład na sferze dwuwymiarowej we współrzędnych (ϑ, φ) pole wektorowe $X = \partial_\varphi$ bylibyśmy być może skłonni uznać za stałe, ale to samo pole wektorowe we współrzędnych stereograficznych wygląda już zupełnie inaczej $\partial_\varphi = -x\partial_y + y\partial_x$ i pomysł z nazwaniem go stałym polem wydaje się cokolwiek dziwny. Różnica polega na tym, że wiązka $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, której cięciem jest funkcja jest trywialna, więc wartości funkcji w różnych punktach należą do tej samej przestrzeni. Wiązka, której cięciem jest pole wektorowe $\tau_M : TM \rightarrow M$ już trywialna nie jest – wartości w różnych punktach należą do różnych przestrzeni stycznych. Przestrzenie te są co prawda izomorficzne, ale nie kanonicznie. Żeby porównywać wartości pola wektorowego w różnych punktach potrzebujemy albo dodatkowej struktury (która nazywa się, zgodnie z tym do czego służy, *po-wiązaniem* lub z łaciny *koneksją*) albo jakiejś metody na sprowadzanie wartości z otoczenia do jednego punktu. Zaczniemy od tego drugiego sposobu. Do sprowadzania wartości pól wektorowych albo kowektorowych do jednego punktu posłuży nam potok pola wektorowego. Operacja badania zmienności różnych pól tensorowych, czyli obliczania pochodnych tych pól, odbywać się będzie wzdłuż ustalonego pola wektorowego.

6.1 Pochodna Liego.

Podstawowym pojęciem potrzebnym do zdefiniowania pochodnej Liego jest *potok pola wektorowego*. Odwzorowanie różniczkowalne $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ nazywamy *grupą dyfeomorfizmów*, jeżeli spełnione są dwa warunki

1. $\forall q \in M \quad \varphi(0, q) = q,$