

Geometria różniczkowa 2018/2019

2. seria zadań domowych

Zad. 1. Zapisać formę

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy + d(\log(x^2 + y^2))dz$$

we współrzędnych $(u, v, \phi) \in]0, \infty[\times]0, \infty[\times]0, 2\pi[$

$$x = uv \cos \phi, \quad y = uv \sin \phi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

Zad. 2. Zapisać poniższe dwuformy w bazie kanonicznej

$$1. \quad \omega = \sum_{0 \leq k < l \leq n} \sin \frac{\pi}{4} (l - k) f^k \wedge f^l$$

$$2. \quad \omega = \sum_{0 \leq k < l \leq n} \sin \frac{\pi}{4} (l - k) \cos \frac{\pi}{12} (l - k) f^k \wedge f^l$$

gdzie f^i są liniowo niezależne.

Zad. 3. Niech

$$\omega = \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} \right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy + \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{z^2} \right) dz, \quad \text{na } \mathbb{R}_+^3$$

Pokazać, że $d\omega = 0$ oraz (*) znaleźć funkcję f taką, że $\omega = df$.

Zad. 4. Obliczyć krzywe całkowe pola wektorowego na $\mathbb{R}^3$

$$X = (x + y + z) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Całki i twierdzenie Stokesa, lemat Poincaré

Zad. 5. Niech

$$\int_S (-y \, dx + xz \, dy) \wedge dz \tag{1}$$

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\} \tag{2}$$

gdzie S jest zorientowana na zewnątrz sfery. Obliczyć całkę na dwa sposoby

1. stosując twierdzenie Stokesa

2. bezpośrednio

Zad. 6. Oblicz całkę z formy $\omega = x^2 dy + y^2 dx$ po brzegu powierzchni zadanej przez

$$x^2 + (y/2)^2 + (z/2)^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

Zad. 7. Oblicz $\int_S \Omega(\text{rot} F, \cdot, \cdot)$ gdzie $F = [2z, 3x, 5y]$ a S jest powierzchnią zadaną parametrycznie przez $[0, 3] \times [0, 2\pi] \ni (r, \theta) \mapsto [r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - r^2]$.

Zad. 8. Pokaż, że każda 3-forma na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ jest zupełna.

Zad. 9. Pole od dipola magnetycznego dane jest wzorem

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^5}, \quad r \neq 0 \quad (3)$$

gdzie $\vec{m}$ to moment magnetyczny, μ_0 stała.

1. Pokaż, że $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{B} = 0$
2. Znajdź takie pole wektorowe $\vec{A}$, że $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
3. Znajdź taką funkcję f , że $\vec{B} = \nabla f$

Wskazówka: Wprowadzić dwuformę $b = \Omega(\vec{B}, \cdot, \cdot)$ i jednoformę $c = g(\vec{B}, \cdot)$

Klasyczne wersje dla pola wektorowego F

1. Praca pola siły

$$\int_{\gamma} g(\vec{F}, \cdot) \quad (4)$$

2. Strumień pola wektorowego przez powierzchnie

$$\int_S \Omega(\vec{F}, \cdot, \cdot) \quad (5)$$

Zad. 10. Znajdź pracę pola sił

1. $F = [6z, y^2, 12x]$ wzdłuż krzywej $[0, 2\pi] \ni t \mapsto [\sin t, \cos t, t/6]$.
2. $F = [y^2 - x^2, x^2 + y^2]$ wzdłuż brzegu trójkąta ograniczonego prostymi $y = 0$, $x = 3$ i $y = x$. Orientacja brzegu przeciwna do ruchu wskazówek zegara.

3. $F = [x^2y^3, 1, z]$ wzdłuż krzywej będącej przecięciem powierzchni walca $x^2 + y^2 = 4$ i półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Krzywa jest zorientowana przeciwnie do ruchu wskazówek zegara gdy patrzymy na nią z góry.

Zad. 11. Znajdź strumień pola

1. $F = [0, y, -z]$ przez powierzchnię składającą się z paraboloidy $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ i koła $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$ zorientowaną na zewnątrz. Jaki jest strumień przez sam kawałek paraboloidy?
2. $F = [x, y, z^4]$ przez powierzchnię (boczną) stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ poniżej płaszczyzny $z = 1$. Stożek jest zorientowany w dół.

Zad. 12. Znajdź potencjał skalarny i potencjał wektorowy o ile pola te potencjały dopuszczają.

1. $F = [2xy + yz, x(x + z), xy]$
2. $F = [x(y - 2z), -y^2, z(z + x)]$
3. $F = [\frac{3}{2}x^2 + yz, -y^2 + xz, -\frac{1}{2}z^2 + xy]$

Zad. 13. Oblicz strumień pola

$$\vec{E} = a \left(\frac{x}{r^2} \hat{e}_x + \frac{y}{r^2} \hat{e}_y + \frac{z}{r^2} \hat{e}_z \right)$$

przez powierzchnię walca

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad 0 \leq z \leq h$$

Zad. 14. Czy pole $\vec{B} = y\hat{e}_x + (x + y + 2z)\hat{e}_y + (2y - z)\hat{e}_z$ posiada potencjał skalarny? Czy pole $\vec{B}$ posiada potencjał wektorowy? W przypadku pozytywnej odpowiedzi znajdź te potencjały

Pola powierzchni:

Zad. 15. Znajdź pole powierzchni

1. torusa o promieniach R i r .
2. kawałka paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$ ograniczonej przez powierzchnię walca $x^2 + y^2 = 49$
3. kawałka stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ znajdującego się w walcu $x^2 + y^2 \leq 2x$
4. sfery S^4

Zad. 16. Oblicz długość krzywej

1. zadanej parametrycznie przez $[0, 2] \ni t \mapsto [t^3, \sqrt{\frac{3}{2}}t^2, t]$
2. zadanej w sposób uwikłany przez $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, $x = z \sin z + \cos z$ i $0 \leq z \leq 7$.