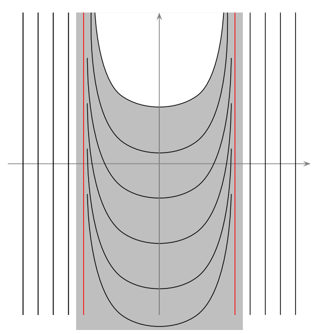
Geometria Różniczkowa I

wykład drugi

Powierzchnie zanurzone, o których rozmawialiśmy na poprzednim wykładzie są bardzo istotną klasą przykładów rozmaitości różniczkowych. Pod koniec dzisiejszego wykładu okaże się, że przykłady te są nie tylko bardzo istotne, ale także bardzo ogólne. Na razie zajmijmy się jednak definiowaniem bardziej abstrakcyjnego pojęcia rozmaitości nie odwołującego się do zanurzenia w przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

Definicja 1. *Rozmaitością M wymiaru n* nazywamy przestrzeń topologiczną Hausdorffa taką, że każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie otwarte $\mathcal{O}$ homeomorficzne z pewnym otwartym zbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Przypominamy, że w tym kontekście homeomorfizm oznacza ciągłą bijekcję, której odwrotność też jest ciągła. Powyższa definicja wyraża taką intuicję, że rozmaitość jest to zbiór, który lokalnie wygląda jak kawałek $\mathbb{R}^n$, natomiast nie wspomina o strukturze różniczkowej. Nie ma więc sensu jakiekolwiek różniczkowanie funkcji określonej na rozmaitości w powyższym sensie, można za to mówić o odwzorowaniach ciągłych. Żeby podkreślić fakt braku struktury różniczkowej o takich rozmaitościach mówi się często dodając przymiotnik *topologiczne*. Przypominamy również, że przestrzeń Hausdorffa jest to taka przestrzeń topologiczna w której każde dwa punkty mają rozłączne otoczenia. Większość przestrzeni topologicznych, z którymi spotyka się fizyk ma tę własność. Podanie przykładu przestrzeni, która nie jest przestrzenią Hausdorffa wymaga namysłu. Ja mam w zanadrzu następujący przykład: punktami przestrzeni są krzywe (niektóre dosyć proste) na rysunku. Te krzywe, które znajdują się w centralnej części asymptotycznie dążą do prostych $x = 1$ i $x = -1$.



Otoczenia składają się z sąsiadujących krzywych. W ten sposób proste $x = 1$ i $x = -1$ nie mają rozłącznych otoczeń. Przykład jest opisany w sposób nie bardzo precyzyjny, nie koncentrujemy się jednak na kwestiach hausdorffowości lub niehausdorffowości.

Sama struktura topologiczna i homeomorfizmy z $\mathbb{R}^n$ nie wystarcza do naszych celów. My chcielibyśmy zajmować się analizą na rozmaitościach, w szczególności chcielibyśmy coś różniczkować. W tym celu potrzebujemy bogatszej struktury. Zaobserwujmy najpierw, że pojęcie wymiaru ma sens, ponieważ nie ma homeomorfizmów z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ dla $m \neq n$ (bez dowodu). Odwzorowanie $\varphi : M \supset \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ będące homeomorfizmem (występującym w definicji rozmaitości) nazywamy *lokalną mapą* na rozmaitości M, lub *lokalnym układem współrzędnych*. Kolekcję lokalnych map o tej własności, że każdy punkt rozmaitości należy do dziedziny przynajmniej jednej mapy nazywamy *atlasem* na rozmaitości M. W przypadku, kiedy dwie mapy mają dziedziny o niepustym przecięciu możemy mówić o odwzorowaniu zmiany współrzędnych:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}\cap\mathcal{U} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\psi\circ\varphi^{-1}"] \\ & \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

Odwzorowanie $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma dobrze nam znane dziedzinę i przeciwdziedzinę. W szczególności potrafimy sprawdzać różniczkowalność takich odwzorowań. Mówimy, że *atlas jest klasy* $\mathcal{C}^k$, jeśli wszystkie odwzorowania zmiany współrzędnych są klasy $\mathcal{C}^k$. Można mówić także o atlasie gładkim ($\mathcal{C}^\infty$) oraz analitycznym ($\mathcal{C}^\omega$).

Definicja 2. *Rozmaitością różniczkową klasy* $\mathcal{C}^k$ nazywamy rozmaitość wraz z atlasem klasy $\mathcal{C}^k$. Mówimy także o *rozmaitościach gładkich*, tzn klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz *analitycznych*, tzn $\mathcal{C}^\omega$.

W trakcie naszego wykładu rozważać będziemy właściwie jedynie rozmaitości gładkie. Przy okazji warto zaobserwować, że jeśli na rozmaitości istnieje struktura $\mathcal{C}^1$, to istnieje także struktura gładka. Dzięki temu powierzchnie zanurzone o których mówiliśmy na poprzednim wykładzie są także rozmaitościami gładkimi, choć domagaliśmy się zawsze, aby wszystkie odwzorowania były klasy $\mathcal{C}^1$. W szczególności występujący w definicji powierzchni zanurzonej układ współrzędnych w otoczeniu punktu, taki, że przynależność do powierzchni oznacza znikanie ostatnich współrzędnych dostarcza lokalnej mapy - należy wziąć pierwsze nieznikające k współrzędnych. Formalnie oznacza to, że składamy układ współrzędnych Φ z rzutem na podprzestrzeń w $\mathbb{R}^k \in \mathbb{R}^n$ zachowując klasę różniczkowalności.

Przykład 1. W przestrzeni $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wprowadzamy relację równoważności

$$(z,w) \sim (z',w') \iff \exists \rho \in \mathbb{C}_* : \quad z = \rho z' \quad w = \rho w'.$$

Rozważamy zbiór $M = X/_\sim$ klas abstrakcji względem powyższej relacji. Jest to w naturalny sposób przestrzeń topologiczna - wyposażona jest w topologię ilorazową. Zbiór $\mathcal{O} \subset M$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w X. Symbolem π oznaczamy kanoniczną projekcję $\pi : X \to M$ na przestrzeń ilorazową. Wprowadźmy teraz w M strukturę rozmaitości gładkiej: Wyróżniamy dwa zbiory otwarte $\mathcal{O}, \mathcal{U} \subset M$:

$$\mathcal{O} = \{[z,1] : \quad z \in \mathbb{C}\},$$

$$\mathcal{U} = \{[1,w] : \quad w \in \mathbb{C}\}.$$

Zauważmy, że $[0,1] = \{(0,w)\}$, $[1,0] = \{(z,0)\}$ oraz $[1,0] \in \mathcal{U}$, $[0,1] \in \mathcal{O}$, ponadto $\mathcal{U} = M \setminus \{[0,1]\}$ i $\mathcal{O} = M \setminus \{[1,0]\}$. Mamy więc

$$M = \mathcal{O} \cup \mathcal{U}.$$

Otwartość obu zbiorów także nie podlega dyskusji. Potrzebujemy teraz odwzorowania w $\mathbb{R}^n$ ze stosownym n. Definiujemy zatem

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad & \varphi([z,1]) = (\Re(z), \Im(z)) \\ \psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad & \varphi([1,w]) = (\Re(w), -\Im(w)) \end{aligned} .$$

Obrazy obydwu map to cała przestrzeń $\mathbb{R}^2$, φ, ψ są homeomorfizmami. Sprawdźmy teraz czy zadają strukturę rozmaitości różniczkowej. Dla ułatwienia rachunków oznaczamy

$$\begin{aligned} z = x + iy \quad & \varphi([z,1]) = (x,y) \\ w = a + bi \quad & \psi([1,w]) = (a,-b). \end{aligned}$$

Przecięcie $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ składa się z klas abstrakcji par takich, że żadna współrzędna nie jest równa zero. Możemy w każdej takiej klasie znaleźć reprezentantów obu typów $(z,1)$ i $(1,w)$. Warunek równoważności $[z,1] = [1,w]$ oznacza, że

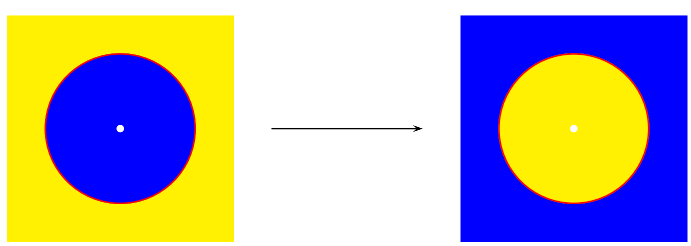
$$z = \frac{1}{w}, \quad \text{czyli} \quad x + iy = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Odwzorowanie zamiany współrzędnych, które parze (a,b) przypisuje parę (x,y) jest postaci

$$\varphi \circ \psi^{-1} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \ni (a,b) \longmapsto (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\
\mathcal{O} \cap \mathcal{U} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
& \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[uu, "\phi\circ\psi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

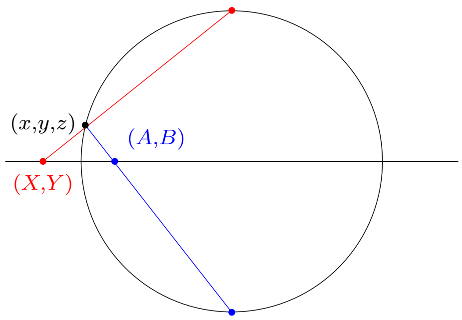
Widać, że odwzorowanie zamiany współrzędnych jest odwzorowaniem gładkim. Jest to inwersja względem okręgu jednostkowego



Jak Państwo sądzą, którą z dobrze znanych dwuwymiarowych powierzchni właśnie opisaliśmy? Odgadnąć to można przyglądając się wzorom dotyczącym zamiany zmiennych. Wzory te wyglądają zupełnie tak samo jak wzory związane z zamianą zmiennych stereograficznych na sferze S^2 związanych z biegunami północnym i południowym. Istotnie, weźmy $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ i zapiszmy współrzędne stereograficzne względem obu biegunów:

$$X = \frac{x}{1-z} \qquad A = \frac{x}{1+z}$$

$$Y = \frac{y}{1-z} \qquad B = \frac{y}{1+z}$$



$$X = \frac{A}{A^2+B^2} \qquad Y = \frac{B}{A^2+B^2}.$$

Spodziewamy się więc, że nasza rozmaitość M to sfera S^2. Bezpośrednie odwzorowanie $F : M \to \mathbb{R}^3$, którego obrazem jest S^2 można zdefiniować następująco:

$$F([x+iy,1]) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right), \qquad F([0,1] = (0,0,1).$$

Należałoby oczywiście sprawdzić, czy jest to odwzorowanie klasy przynajmniej C^1, odwracalne po obcięciu do obrazu i czy jego odwrotność jest także klasy C^1. Rachunki te jednak pominiemy. Standardowo rozmaitość M oznaczana jest $\mathbb{C}P^1$ i nazywana zespoloną przestrzenią projektywną wymiaru (zespolonego) 1. Startując z $\mathbb{C}^{n+1}$ konstruujemy w identyczny sposób $\mathbb{C}P^n$. Właśnie pokazaliśmy, że $\mathbb{C}P^1$ jest dyfeomorficzna z S^2. Pozostałe zespolone przestrzenie przestrzenie projektywne nie mają takich prostych reprezentacji. Można także konstruować rzeczywiste przestrzenie projektywne $\mathbb{R}P^n$ dzieląc $\mathbb{R}^{n+1}$ bez zera przez stosowną relację równoważności. Nietrudno stwierdzić, że $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$.

♣

Inne przykłady znanych (lub nie) dwuwymiarowych powierzchni tworzyć można wprowadzając stosowne relacje równoważności w $\mathbb{R}^2$:

Przykład 2. Pierwsza relacja to:

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \iff \quad y = y', x'-x \in \mathbb{Z}$$

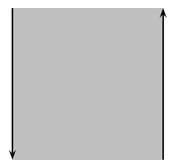
Jest oczywiste, że $\mathbb{R}^2/_\sim$ jest dyfeomorficzne z walcem. Każda klasa równoważności ma reprezentanta w pasku $[0,1[\times\mathbb{R}$, proste $x=0$ i $x=1$ utożsamiamy.

♣

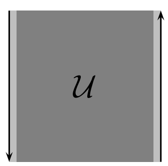
Przykład 3. Druga relacja (dla wygody zmniejszymy trochę rozmiar w pionie) jest relacją w $\mathbb{R}\times]-1,1[$

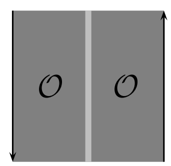
$$(x,y)\sim(x',y') \quad\Longleftrightarrow\quad x'-x=k\in\mathbb{Z},\;\; y'=(-1)^k y.$$

Znowu obserwujemy, że każda klasa równoważności ma reprezentanta w pasku $[0,1[\times]-1,1[$ oraz że odcinki $x=0$ i $x=1$ utożsamiamy zmieniając jednak ich orientację. Wynikiem jest wstęga Moebiusa.



Do opisania wstęgi Moebiusa potrzebne są dwie mapy: z dziedziną $\mathcal{U}=\{[(x,y)] : x\notin\mathbb{Z}\}$ oraz $\mathcal{O}=\{[(x,y)] : x\in]k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}[\}$:





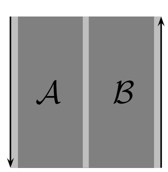
Dla każdej klasy leżącej w $\mathcal{U}$ istnieje reprezentant (α,y) taki, że $\alpha\in]0,1[$. Definiujemy odwzorowanie

$$\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2,\quad \varphi([\alpha,y])=(\alpha,y).$$

Dla każdej klasy leżącej w $\mathcal{O}$ istnieje reprezentant (β,y) taki, że $\beta\in]\frac{1}{2},\frac{2}{3}[$. Definiujemy odwzorowanie

$$\psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2,\quad \varphi([\beta,y])=(\beta,y).$$

Przyjrzyjmy się jeszcze zamianie współrzędnych. Zbiór $\mathcal{O}\cap\mathcal{U}$ składa się z dwóch składowych spójnych $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$



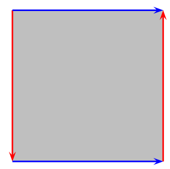
W obszarze $\mathcal{A}$ zamiana zmiennych ma postać $\psi\circ\varphi^{-1}(\alpha,y)\longmapsto(1+\alpha,-y)$, zaś w obszarze $\mathcal{B}$ zamiana ta jest identycznością.

♣

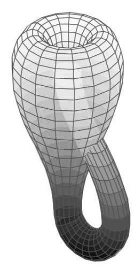
Przykład 4. Ostatniego przykładu dostarcza następująca relacja w $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad x'-x=k\in\mathbb{Z},\;\; y'-(-1)^k y\in\mathbb{Z}.$$

Obserwujemy, że każda klasa równoważności ma reprezentanta w kwadracie $[0,1[\times[0,1[$, przy czym brzegi kwadratu są utożsamione jak na rysunku



Powstała rozmaitość nosi nazwę butelki Kleina. Nie da się ona zanurzyć w przestrzeń $\mathbb{R}^3$, potrzebujemy do tego wymiaru 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ możemy ją zwizualizować jedynie dopuszczając samoprzecięcie:



♣

Mając dwie rozmaitości różniczkowe M i N możemy wypowiadać się o różniczkowalności odwzorowań między nimi.

Definicja 3. Mówimy, że *odwzorowanie $f: M\to N$ jest klasy $\mathcal{C}^k$* jeśli dla każdej pary lokalnych map $(\mathcal{O},\varphi)$ na M i $(\mathcal{U},\psi)$ na N odwzorowanie $\varphi^{-1}\circ f\circ\psi : \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ jest klasy $\mathcal{C}^k$. Rozmaitości M i N muszą być klasy przynajmniej $\mathcal{C}^k$.

Łatwo stwierdzić, że różniczkowalność wystarczy sprawdzać w wybranych mapach dbając aby ich dziedziny pokrywały M i zbiór $f(M)\subset N$.

Na sam koniec zanotujmy twierdzenie

Twierdzenie 1 (Whitney)**.** *Każda parazwarta różniczkowalna i spójna powierzchnia wymiaru n może zostać zanurzona w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Powyższe twierdzenie pokazuje, że szczególne przykłady powierzchni zanurzonych są w istocie bardzo ogólne.