STWIERDZENIE: Niech M będzie orientowalną rozmaitością z brzegiem. Wtedy ∂M także jest orientowalna. Jeśli M jest zorientowane to na ∂M istnieje wyróżniona orientacja.

DOWÓD: Wybieramy orientację na M i atlas z nią zgodny. Niech (O,φ) będzie elementem atlasu. Jeśli $O\cap\partial M\neq\emptyset$ to $(O\cap\partial M,\tilde{\varphi})$ dla $\tilde{\varphi}=(x^2,x^3,\dots,x^n)$ (jeśli $\varphi=(x^1,x^2,\dots,x^n)$) jest układem współrzędnych na ∂M. Jeśli $(O_i,\varphi_i)_{i\in I}$ jest zgodnym atlasem na M to $(\partial M\cap O_i,\tilde{\varphi}_i)$ jest zgodnym atlasem na ∂M. Orientacja tego atlasu jest wyróżnioną orientacją brzegu. ∎

Jeśli $\imath$ jest orientacją M to $\partial\imath$ oznaczać będzie indukowaną orientację brzegu.

TWIERDZENIE Sir George G. Stokes: Niech M będzie zwartą zorientowaną rozmaitością z brzegiem wymiaru n i niech ω będzie $n-1$ formą

$$\int_{(M,\imath)} d\omega=\int_{(\partial M,\partial\imath)}\omega$$

DOWÓD: Idea: całkujemy $d\omega$ po kostce w $\mathbb{R}^2$ $\quad \omega=f(x,y)dx+g(x,y)dy \quad D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$

$d\omega(x,y)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\wedge dy$, orientacja kanoniczna

$$\int_D\omega=\int_D\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\wedge dy=\int_D\frac{\partial g}{\partial x}dx\wedge dy-\int_D\frac{\partial f}{\partial y}dxdy=\int_D\frac{\partial g}{\partial x}dxdy-\int_D\frac{\partial f}{\partial y}dxdy=$$

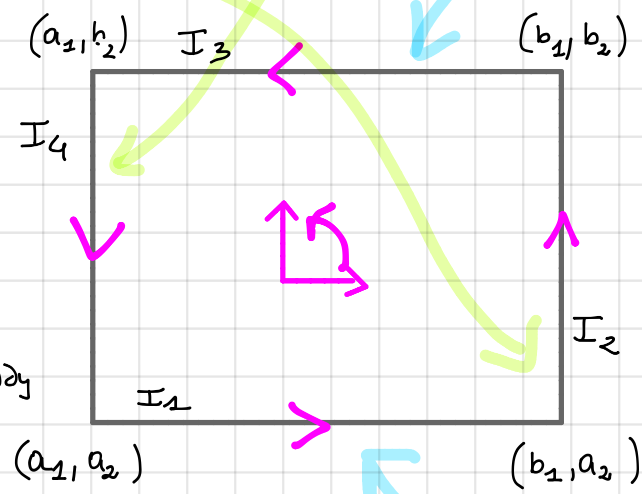
$$=\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}dy\,\frac{\partial g}{\partial x}-\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int_{a_2}^{b_2}dy\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial g}{\partial x}dx-\int_{a_1}^{b_1}\left[f(x,b_2)-f(x,a_2)\right]dx=$$

$$=\int_{a_2}^{b_2}\left[g(b_1,y)-g(a_1,y)\right]dy-\int_{a_1}^{b_1}\left[f(x,b_2)-f(x,a_2)\right]dx=$$

$$=\int_{a_2}^{b_2}g(b_1,y)\,dy-\int_{a_2}^{b_2}g(a_1,y)-\int_{a_1}^{b_2}f(x,b_2)\,dx+\int_{a_1}^{b_2}f(x,a_2)\,dx=$$

$\omega_{|I_3}=f(x,b_2)dx$

$$\int_{(I_3,\partial\imath)}\omega=-\int_{a_1}^{b_1}f(x,b_2)dx$$



$\omega_{|I_4}=g(a_1,y)dy$

y rośnie przeciwnie do orientacji

↓

$$\int_{(I_4,\partial\imath)}\omega=-\int_{a_2}^{b_2}g(a_1,y)\partial y$$

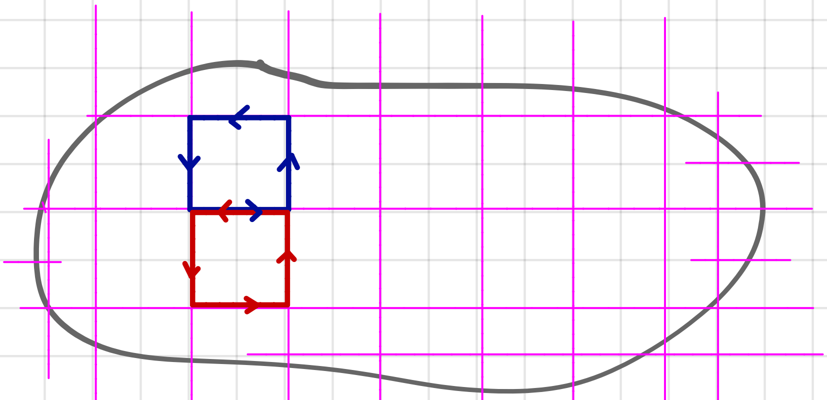
$\omega_{|I_1}=f(x,a_2)dx$

zmienna x rośnie w kierunku zgodnym z orientacją

$$\int_{(I_1,\partial\imath)}\omega=\int_{a_1}^{b_1}f(x,a_2)dx$$

$$\int_{(I_1,\partial\imath)}\omega+\int_{(I_2,\partial\imath)}\omega+\int_{(I_3,\partial\imath)}\omega+\int_{(I_4,\partial\imath)}\omega=\int_{(\partial D,\partial\imath)}\omega$$

Machanie rękami:



Pokazaliśmy jak to działa na kostce. Dowolny obszar można podzielić na kostki. Wkładu do całki nie dadzą te kostki, które są w środku i mają sąsiadów, bo poszczególne wkłady wyzerują się ze względu na orientację i zostanie tylko to co na brzegu.

Dowód właściwy: M zwarta - bierzemy skończony atlas zgodny z orientacją: $(O_i,\varphi_i)_{i\in I}$ $|I|<\infty$
Weźmy rozkład jedności związany z $(O_i\,\varphi_i)$

$$d\omega = d(1\cdot\omega) = d\left(\sum_i \alpha_i \omega\right) = \sum_i d(\alpha_i\omega) = \sum_i d\alpha_i\wedge\omega + \sum_i \alpha_i\, d\omega = \underbrace{\left(\sum_i d\alpha_i\right)}_{d\left(\sum_i \alpha_i\right)}\wedge\omega + \sum_i \alpha_i\, d\omega =$$

$$= \sum_i \alpha_i\, d\omega$$

$$d\omega = d\left(\sum_k \alpha_k\omega\right) = \sum_k \alpha_k\, d\omega$$

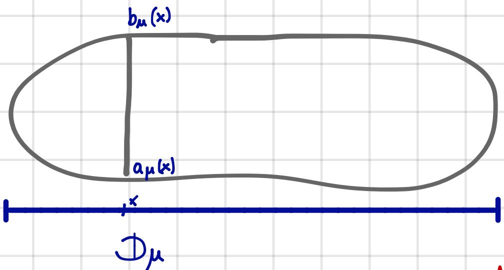
$$\int_{(M,i)} d\omega = \int_{(M,i)} \sum_k d(\alpha_k\omega) = \int_{(M,i)} \sum \alpha_k\, d\omega$$

$\sum_k \int_{M_i} d(\alpha_k\omega)$ każda z form ma nośnik w O_k, można zapisać we współrzędnych

$$\alpha_k\omega = \sum_{\mu=1}^{n} f^k_\mu(x)\, dx^1\wedge\dots\overset{\mu}{\vee}\dots\wedge dx^n \qquad d(\alpha_k\omega) = \sum_\mu (-1)^{\mu-1}\frac{\partial f^k_\mu}{\partial x^\mu}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

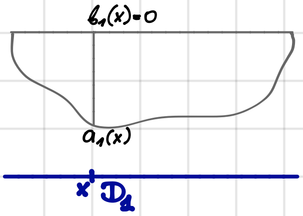
$$\int_{(O,i)} d\omega = \int_{(O,i)} \sum_\mu (-1)^{\mu-1}\frac{\partial f^k}{\partial x^\mu}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n = \int_{\varphi(O)} \sum_\mu (-1)^{\mu-1}\frac{\partial f^k}{\partial x^\mu}\, dx^1 dx^2\dots dx^n = \sum_\mu (-1)^{\mu-1}\int_{D_\mu} dx^1\dots\overset{\mu}{\vee}\dots dx^n \int_{a_\mu(x)}^{b_\mu(x)} \frac{\partial f^k_\mu}{\partial x^\mu}\, dx^\mu$$

gdzie $D_\mu, a_\mu(x), b_\mu(x)$ są jak w tw. Fubiniego, a_μ, b_μ zależą od x – punktu w D_μ



$$= \sum_\mu (-1)^{\mu-1}\int_{D_\mu}\left[f^k_\mu(\dots b_\mu(x)\dots) - f^k_\mu(\dots a_\mu(x)\dots)\right] dx^1\dots\overset{\mu}{\vee}\dots dx^n$$

Jeśli $\varphi(O)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$ to wartości w punktach granicznych są 0, bo nośnik f_μ zawiera się w O. Do całki dają wkład tylko brzegowe układy współrzędnych.



W brzegowym układzie współrzędnych jedynie składnik z $\mu=1$ daje wkład do całki

$$\int_{(\mathcal{O},\iota)} d(\alpha_k \omega) = \int_{\varphi(\mathcal{O})\cap\Pi} f_1^k(0,x^2,\dots,x^n) = \int_{\tilde{\varphi}(\mathcal{O}\cap\partial M)} f_1^k(0,x^2,\dots,x^n)\,dx^2\wedge\dots\wedge dx^n$$

Sumując po wszystkich k dostajemy $$\sum_k \int_{\varphi_k(\mathcal{O}_k\cap\partial M)} f_1^k(0,x^2,\dots,x^n)\,dx^2\wedge\dots\wedge dx^n = \int_{(\partial M,\partial\iota)} \omega \qquad \blacksquare$$

Zgodnie z definicją całki na rozmaitości

$$\sum_{i\in I}\int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0,x^2,\ldots,x^n)\mathsf{d}x^2\cdots\mathsf{d}x^n = \int_{(\partial M,\partial\imath)}\omega,$$

gdyż $(\tilde{\mathcal{O}}_i,\tilde{\varphi}_i)$ stanowi atlas na ∂M zgodny z orientacją a obcięcie (α_i) do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu.□

1.2 Klasyczne wersje Twierdzenia Stokes'a

W tej części zajmiemy się interpretacją poniższych wzorów analizy wektorowej w języku Twierdzenia Stokes'a.

$$\int_S (\vec{n}|\mathrm{rot}\, X)d\sigma = \int_{\partial S}(\vec{t}\,|X)d\ell \tag{2}$$

$$\int_D \mathrm{div}\, X\, dv = \int_{\partial D}(\vec{n}|X)d\sigma. \tag{3}$$

Dyskutować będziemy obiekty, które zdefniować można na rozmaitości M wyposażonej w strukturę metryczną g, tzn. na przestrzeni stycznej w każdym punkcie dany jest iloczyn skalarny, czyli forma dwuliniowa, niezdegenerowana, symetryczna i dodatnio określona.

Przypomnijmy sobie kilka faktów algebraicznych. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie-wymiarową a g iloczynem skalarnym określonym na tej przestrzeni. Iloczyn skalarny definiuje odwzorowanie

$$G: V\to V^*, \qquad G(v)=g(v,\cdot).$$

Fakt, że iloczyn skalarny jest symetryczny powoduje, że odwzorowanie G jest samosprzężone. Fakt, że iloczyn skalarny jest niezdegenerowany powoduje, że G jest izomorfizmem liniowym. Dodatkowym obiektem związanym z iloczynem skalarnym jest forma kwadratowa $\tilde{g}$, która służy do definiowania długości wektora:

$$\tilde{g}(v)=g(v,v), \quad \|v\|=\sqrt{\tilde{g}(v)}.$$

My pracować będziemy gównie z g i G. Jeśli w V wybierzemy bazę $e=(e_1,e_2,\ldots e_n)$ iloczyn skalarny oraz odpowiedni samosprzężony izomorfizm przedstawić możemy przy pomocy macierzy. Macierz formy g w bazie e oznaczamy zazwyczaj $[g]_e$. Dla wygody będziemy także używać oznaczenia $\mathcal{G}_e$. Będziemy także pomijać symbol bazy, jeśli będzie jasne jakiej bazy używamy. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ mają postać

$$\mathcal{G}_{ij}=g(e_i,e_j).$$

Zwróćmy uwagę na położenie indeksów, które, jakkolwiek *historyczne*, ma jednak uzasadnienie. Tradycyjnie indeksy przy współrzędnych wektora piszemy na górze oraz sumujemy po powtarzających się indeksach górnym i dolnym. W tej sytuacji, jeśli $v=v^ie_i$ oraz $w=w^ie_i$ to

$$g(v,w)=\mathcal{G}_{ij}v^iw^j$$

albo

$$g(v,w)=\left([v]^e\right)^T\mathcal{G}_e[w]^e.$$

Jeśli $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ oznacza bazę dualną do e to

$$G(v) = \mathcal{G}_{ij} v^i \varepsilon^j \in V^*.$$

Zapisać też można

$$g = \mathcal{G}_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j.$$

Zamiana bazy w macierzy formy dwuliniowej odbywa się według wzoru

$$\mathcal{G}_f = Q^T \mathcal{G}_e Q,$$

gdzie Q jest macierzą odwzorowania identycznościowego na V zapisanego w bazach f i e, dokładniej

$$Q = [id_V]^e{}_f.$$

Zamieniając bazę w macierzy odwzorowania używamy macierzy przejścia wzajemnie odwrotnych. Tu obkładamy wyjściową macierz macierzą przejścia i do niej transponowaną. Odzwierciedla to charakter macierzy $\mathcal{G}$. Jest to oczywiście także kwadratowa tabelka liczb, ale funkcjonująca inaczej niż zwykła macierz odwzorowania.

Tensor metryczny na rozmaitości zadaje powyżej opisaną strukturę punkt po punkcie na przestrzeniach stycznych i kostycznych. Mamy więc iloczyn skalarny g na każdej z przestrzeni stycznych, możemy liczyć długości wektorów stycznych oraz dysponujemy izomorfizmem samosprzężonym

$$G : \mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}^*M.$$

Izomorfizm ten pozwala utożsamiać wektory z kowektorami, co jest wykorzystywane w teoriach fizycznych, choć zazwyczaj pomijane milczeniem jako oczywiste. Mając do dyspozycji lokalny układ współrzędnych $(\mathcal{O}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ mamy także w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej i przestrzeni kostycznej. Możemy zatem używać macierzy związanej z tensorem metrycznym. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ są teraz nie liczbami a funkcjami gładkimi na M. Załóżmy teraz, że rozmaitość M jest orientowalna oraz że wybrano na niej orientację $\imath$. Orientowalność wiąże się z istnieniem nieznikających n-form nazywanych formami objetości. Istnienie tensora metrycznego i wybranej orientacji pozwala zdefiniować w kanoniczny sposób formę objetości związaną z metryką. Jeśli układ współrzędnych jest zgodny z orientacją, to metryczna forma objętości Ω ma postać

$$\Omega = \sqrt{\det \mathcal{G}}\, \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

Struktura metryczna i orientacja pozwala utożsamiać pola wektorowe i jednoformy oraz pola wektorowe i $n-1$ formy. Jeśli X jest polem wektorowym na M, to $G \circ X$ jest jednoformą a $i_X \Omega$ jest $(n-1)$-formą.

Gradient: Gradient jest polem wektorowym odpowiadającym różniczce funkcji. Jeśli f jest funkcją gładką na M

$$\operatorname{grad} f = G^{-1} \circ \mathsf{d}f.$$

Definicja ta jest niezależna od współrzędnych. Pozwala jednak w łatwy sposób zapisywać gradient w dowolnych współrzędnych bez uciążliwego zamieniania zmiennych w operatorach różniczkowych. Prawidłowa definicja gradientu pozwala także odpowiedzieć na pytanie, *czy dane* *pole wektorowe X jest gradientem funkcji, tzn. czy ma potencjał sklarny.* Pole mające potencjał skalarny odpowiada jednoformie, która jest różniczką, zatem jej rózniczka musi być zero. Warunkiem koniecznym potencjalności pola jest więc, aby

$$\mathsf{d}(G \circ X) = 0.$$

Istnienie bądź nieistnienie potencjału zależy już dalej od kształtu obszaru, jak w Lemacie Poincarè.

Rotacja: Na trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości z metryką zdefiniować można rotację pola wektorowego ($\mathrm{rot}\, A$) następującym wzorem

$$\mathsf{d}(G \circ A) = \imath_{\mathrm{rot}\, A}\Omega.$$

Sprawdźmy, że na $\mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym i kanoniczną orientacją otrzymamy znane nam już wzory na rotację pola wektorowego w kartezjańskim układzie współrzędnych. Niech

$$A = A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Korzystając z faktu, że kanoniczne współrzędne w $\mathbb{R}^3$ są ortonormalne otrzymujemy

$$G \circ A = A_x \mathsf{d}x + A_y \mathsf{d}y + A_z \mathsf{d}x.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\mathsf{d}(G\circ A) = \frac{\partial A_x}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x+\frac{\partial A_x}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x+\frac{\partial A_y}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y+\frac{\partial A_y}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}y+\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}z+\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z =$$
$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x$$

Oznaczmy teraz $B = \mathrm{rot}\, A$. Forma objetości w kanonicznych współrzędnych to $\Omega = \mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z$. Mamy zatem

$$\imath_B\Omega = B_x\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + B_y\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + B_z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$$

i z porównania obu wzorów otrzymujemy

$$\mathrm{rot}\, A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

co zgadza się z tradycyjnym wzorem na rotację. Zaletą naszej definicji jest, że możemy teraz zapisać rotację w dowolnym układzie współrzędnych nie dokonując uciążliwej zamiany zmiennych.

Fakt 2

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0.$$

Dowód:

$$\imath_{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f}\Omega = \mathsf{d}(G\circ \mathrm{grad}\, f) = \mathsf{d}(G\circ G^{-1}\circ \mathsf{d}f) = \mathsf{d}\mathsf{d}f = 0.$$

Zwężenie w formą objętości jest równe zero jedynie dla pola zerowego, zatem istotnie $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$. □
Powyższy fakt wskazuje, że jedną z metod sprawdzania potencjalności pola jest obliczenie jego rotacji. Fakt, iż rotacja gradientu znika, wynika ze znikania drugiej różniczki.

Dywergencja: Na metrycznej orientowalnej rozmaitości dowolnego wymiaru zdefiniować można dywergencję pola wektorowego wzorem

$$(\operatorname{div} X)\Omega = \mathsf{d}(\imath_X \Omega).$$

Dywergencja nie zależy od orientacji względem której wybrana jest forma objętości Ω, gdyż pojawia się ona po obydwu stronach równania. Ewentualna zmiana znaku odbywa się jednocześnie po obu stronach równania. W kartezjańskim układzie współrzędnych łatwo jest wypisać dywergencję:

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(\imath_X\Omega) = \mathsf{d}(X_x \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + X_y \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + X_z \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y) = \\ \frac{\partial X_x}{\partial x}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + \frac{\partial X_y}{\partial y}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial X_z}{\partial z}\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \\ \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z,\end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Także i w tym przypadku bardzo łatwo jest wypisać dywergencję w innym układzie współrzędnych korzystając z definicji a nie z procedury zamiany zmiennych.

Fakt 3

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} X = 0$$

Dowód:

$$(\operatorname{div}\operatorname{rot} X)\Omega = \mathsf{d}(\imath_{\operatorname{rot} X}\Omega) = \mathsf{d}(\mathsf{d}G \circ X)) = 0$$

□