

8.6 Wieloformy, wielowektory, Gwiazdka Hodge'a

Materiał zawarty w tym podrozdziale omówiony zostanie na ćwiczeniach.

W bardzo podobny sposób do tego, w jaki definiowaliśmy wieloformy na przestrzeni wektorowej, zdefiniować można wielowektory. Skorzystamy tu z prawdziwego dla skończone-wymiarowych przestrzeni wektorowych faktu iż $(V^*)^*$ jest kanonicznie izomorficzna z V . Możemy zamienić rolami V i V^* traktując V jako zbiór funkcji liniowych na V^* i rozważać także zbiór funkcji wieloliniowych antysymetrycznych na V^* , czyli $\Lambda^k V$. Swoją odpowiednik wektorowy ma też konstrukcja iloczynu zewnętrznego. W języku tensorowym mamy

$$v \wedge w = w \otimes w - w \otimes v$$

oraz

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Ponieważ $(V \otimes V)^* \simeq V^* \otimes V^*$ możemy obliczyć $\alpha \wedge \beta$ na $v \wedge w$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge \beta, v \wedge w \rangle &= \langle \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha, v \otimes w - w \otimes v \rangle = \\ &= \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) - \beta(v)\alpha(w) + \beta(w)\alpha(v) = 2[\alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)] \end{aligned}$$

i ogólnie

$$\langle \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle = k! \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}).$$

Oznacza to, że jeśli e i ϵ są parą baz dualnych w V i V^* to układy $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $\epsilon^{j_1} \wedge \epsilon^{j_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{j_k}$ dla $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ nie są parą baz dualnych. Gdzieś trzeba podzielić przez $k!$. Mając iloczyn skalarny g na V możemy utożsamiać wektory z kowektorami przy pomocy izomorfizmu G . Iloczyn skalarny możemy wprowadzić także na V^* :

$$g(v, w) = (v|w) = \langle G(v), w \rangle = \mathcal{G}_{ij} v^i v^j \quad \tilde{g}(\alpha, \beta) = (\alpha|\beta) = \langle \alpha, G^{-1}(\beta) \rangle = \mathcal{G}^{ij} \alpha_i \beta_j$$

Zgodnie z konwencją, \mathcal{G}^{ij} to wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej do \mathcal{G} . Izomorfizmy G i G^{-1} możemy rozszerzyć na dowolne iloczyny tensorowe. Na przykład jeśli $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ to $G^{-1}(\alpha \otimes \beta) = G^{-1}(\alpha) \otimes G^{-1}(\beta) \in V \otimes V$. Zakładając, że rozszerzenie jest liniowe otrzymujemy

$$G^{-1}(\alpha_{i_1 i_2} \cdots i_k \epsilon^{i_1} \otimes \epsilon^{i_2} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}) = \alpha_{i_1 i_2} \mathcal{G}^{i_1 j_1} \mathcal{G}^{i_2 j_2} \cdots \mathcal{G}^{i_k j_k} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}.$$

Korzystając z rozszerzenia G i G^{-1} definiujemy iloczyn skalarny na przestrzeni k -form $\Lambda^k V^*$ wzorem

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k | \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^k) = \frac{1}{k!} \langle G^{-1}(\alpha^1) \wedge G^{-1}(\alpha^2) \wedge \cdots \wedge G^{-1}(\alpha^k), \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^k \rangle,$$

na dowolne wieloformy (niekoniecznie proste) rozszerzamy poprzez warunek liniowości.

Gwiazdka Hodge'a: Na rozmaitości M z metryką g mamy iloczyn skalarny na każdej przestrzeni stycznnej, zatem wszystko o czym była mowa prawdziwe jest punkt po punkcie. Jeśli

dotatkowo rozmaitość jest zorientowana i w związku z tym wyposażona w kanoniczną formę objętości zdefiniować można przydatne odwzorowanie

$$* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

wzorem

$$*\alpha = \frac{1}{k!} \iota_{G^{-1}(\alpha)} \Omega.$$

Mamy tu do czynienia z pewną kolizją oznaczeń: Ω^k oznacza zbiór k -form na M i jednocześnie Ω jest formą objętości. Myślę jednak, że damy radę odróżniać o którą „omegę” kiedy chodzi. Sprawdźmy najpierw jak nasza definicja działa w praktyce. Zaczniemy od najprostszego przypadku: $M = \mathbb{R}^3$, orientacja kanoniczna, iloczyn skalarny kanoniczny, $\mathcal{G} = \mathbf{1}$, $\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

$$*dx^1 = \iota_{G^{-1}(dx^1)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^2 \wedge dx^3$$

$$*dx^2 = \iota_{G^{-1}(dx^2)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^1 \wedge dx^3$$

$$*dx^3 = \iota_{G^{-1}(dx^3)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 \wedge dx^2$$

$$*(dx^1 \wedge dx^2) = \frac{1}{2} \iota_{G^{-1}(dx^1 \wedge dx^2)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_1 \wedge \partial_2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx^3$$

Popatrzmy teraz na rachunki w układzie sferycznym:

$$\Omega = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}.$$

$$*dr = \iota_{\partial_r} \Omega = r^2 \sin \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi$$

$$*d\vartheta = \iota_{\frac{1}{r^2} \partial_r} \Omega = \frac{1}{r^2} \iota_{\partial_r} \Omega = -\sin \vartheta dr \wedge d\varphi$$

$$*d\varphi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \iota_{\partial_\varphi} \Omega = \frac{1}{\sin \vartheta} dr \wedge d\vartheta$$

$$*dr \wedge d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \iota_{\partial_r \wedge \partial_\vartheta} \Omega = \sin \vartheta d\varphi$$

Zauważmy, że

$$**dx^1 = *dx^2 \wedge dx^3 = dx^1, \quad **dr \wedge d\varphi = * \left(-\frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \right) = dr \wedge d\varphi$$

Z drugiej strony na \mathbb{R}^2

$$*dx^1 = dx^2, \quad *dx^2 = -dx^1, \quad **dx^1 = *dx^2 = -dx^1.$$

Wydaje się więc, że złożenie $**$ jest równe identyczności z dokładnością do znaku. Znak ten musi mieć coś wspólnego z rzędem formy i wymiarem przestrzeni.

Fakt 14 *Zachodzą następujące równości*

1. $*1 = \Omega$

$$2. * \Omega = 1$$

$$3. ** \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha, \quad \alpha \in \Omega^k(M)$$

$$4. \alpha \wedge * \beta = (\alpha | \beta) \Omega \quad \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

Dowód: Zauważmy, że $*$ jest operacją punktową, zatem można wybrać wygodny układ współrzędnych. W tym przypadku jest to taki układ współrzędnych, dla którego w ustalonym punkcie baza $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ jest ortonormalna. Pracować będziemy w takim układzie współrzędnych. Wtedy $G^{-1}(dx^i) = \partial_i$. Zaczynamy od dowodu punktu (3). Każda k -forma jest kombinacją liniową form bazowych $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ z funkcyjnymi współczynnikami. $*$ jest liniowa nad funkcjami, więc można sprawdzić tylko na formach bazowych. Załóżmy, że $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

$$* dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \frac{1}{k!} \iota_{\partial_{i_1} \wedge \partial_{i_2} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \text{sgn } \sigma dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n},$$

gdzie $i_{k+1} < i_{k+2} < \dots < i_n$ oraz σ jest permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Aplikujemy $*$ drugi raz

$$* * dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = * \text{sgn } \sigma dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \text{sgn } \sigma \text{sgn } \rho dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Permutacja ρ ma postać

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \dots & i_n & i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix}.$$

Pozostaje do obliczenia $\text{sgn } \sigma \text{sgn } \rho$: Pamiętając, że znak jest homomorfizmem grupy permutacji w grupę $\{-1, 1\}$ z mnożeniem zauważamy, że

$$\text{sgn } \sigma \text{sgn } \rho = \text{sgn } \rho \text{sgn } \sigma = \text{sgn } \rho \text{sgn } \sigma^{-1} = \text{sgn } (\rho \circ \sigma^{-1})$$

Ostatnie złożenie jest permutacją

$$\rho \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{k-n} & i_{k-n+1} & \dots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \dots & i_n & i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix},$$

której znak jest równy $(-1)^{k(n-k)}$. Dla dowodu punktu (2) zauważmy, że $G^{-1}(\Omega) = \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \dots \wedge \partial_n$, dalej

$$* \Omega = \frac{1}{n!} \iota(\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \dots \wedge \partial_n) \Omega = \frac{1}{n!} n! = 1$$

Punkt (1) wynika z (3) i (2), a właściwie jest jedyną sensowną definicją gwiazdki zero-formy, która pasuje do pozostałych wzorów. W punkcie (4) zauważmy, że obie strony są dwuliniowe, można więc sprawdzać na formach bazowych. Niech więc $\alpha = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ i $\beta = dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$. Forma $*\beta$ jest, z dokładnością do znaku, iloczynem zewnętrznym różniczek

$dx^{j_{k+1}} \wedge dx^{j_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}$, gdzie $\{j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. W tej sytuacji $\alpha \wedge * \beta$ jest różna od zera jedynie gdy $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$. Jeśli dodatkowo założymy naturalne uporządkowanie indeksów oznacza to, że $i_l = j_l$ dla $l = 1, \dots, k$ and $\alpha = \beta$. Podobnie $(\alpha | \beta)$ jest różna od zera jedynie gdy $\alpha = \beta$, gdyż

$$(\alpha | \beta) = \frac{1}{k!} \iota_{\partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

Ostatecznie, gdy $\alpha = \beta$ prawa strona to

$$(\alpha | \alpha) \Omega = \Omega$$

a lewa

$$\alpha \wedge * \alpha = \text{sgn } \sigma dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = (\text{sgn } \sigma)^2 \Omega.$$

Dla porządku zapiszmy, że σ jet permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

□

9 Różniczkowanie pól i form

9.1 Pochodna Liego

Zanim przejdziemy do właściwej części wykładu wypada wspomnieć osobę, kora użyczyła nazwiska badanemu dziś przez nas pojęciu. Marius Sophus Lie (17.12.1842 - 18.02.1899) był matematykiem norweskim. Jego badania i osiągnięcia stanowią podstawę dzisiejszej geometrii różniczkowej. Sophus Lie zajmował się między innymi badaniem równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych. Studiowanie struktury, a zwłaszcza symetrii równań różniczkowych dało początek między innymi teorii grup i algebr Liego.

W geometrii różniczkowej interesuje nas często jak dane pole tensorowe zmienia się od punktu do punktu na rozmaitości. A właściwie częściej chodzi o to, czy są jakieś kierunki w których się nie zmienia. Tu jednak napotykamy na pierwszą pojęciową trudność: zazwyczaj nie wiadomo jak porównywać rozmaite pola (pola wektorowe, formy różniczkowe...) między punktami na rozmaitości. Możemy porównywać wartości funkcji w różnych punktach, ale nie możemy porównywać wartości pola wektorowego w różnych punktach. Wiadomo co to znaczy „funkcja f jest stała na M ”, ale nie wiadomo co to jest stałe pole wektorowe. Na przykład na sferze dwuwymiarowej we współrzędnych (ϑ, φ) pole wektorowe $X = \partial_\varphi$ bylibyśmy być może skłonni uznać za stałe, ale to samo pole wektorowe we współrzędnych stereograficznych wygląda już zupełnie inaczej $\partial_\varphi = -x\partial_y + y\partial_x$ i pomysł z nazwaniem go stałym polem wydaje się cokolwiek dziwny. Różnica polega na tym, że wiązka $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, której cięciem jest funkcja jest trywialna i wartości funkcji w różnych punktach należą do tej samej przestrzeni. Wiązka, której cięciem jest pole wektorowe $\tau_M : TM \rightarrow M$ już trywialna nie jest: wartości w różnych punktach należą do różnych przestrzeni stycznych. Przestrzenie te są co prawda izomorficzne, ale nie

DEFINICJA: Jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów na M nazywamy gładkie odwzorowanie

$$\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \text{ takie, że}$$

(1) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_t = \varphi(t, \cdot)$ jest dyfeomorfizmem

$$\text{tzn } \varphi_0 = \text{id}_M \quad \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

(2) $\forall s, t \in \mathbb{R} \quad \forall q \in M \quad \varphi(s, \varphi(t, q)) = \varphi(t+s, q)$

$$(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$$

(3) $\forall q \quad \varphi(0, q) = q$

Jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów definiuje pole wektorowe

$$X(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t, q)$$

Pole to jest niezmiennicze ze względu na φ tzn $T\varphi_s(X(q)) = X(\varphi_s(q))$. Istotnie

$$T\varphi_s(X(q)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_s(\varphi_t(q)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_{s+t}(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(\varphi_s(q)) = X(\varphi_s(q))$$

Odwzorowanie $\varphi: \Omega \rightarrow M$ jest **lokalną** grupą dyfeomorfizmów jeśli $\Omega \supset \{0\} \times M$, Ω jest otwarty, warunek (3) jest spełniony a warunek (2) spełniony wtedy gdy wyrażenie po prawej i lewej stronie dadzą się wyliczyć. Lokalna grupa dyfeomorfizmów także definiuje pole wektorowe: do zdefiniowania wektora stycznego wystarczy „króciutka” kmywa w otoczeniu 0. Jest też odwrotnie: Pole wektorowe definiuje lokalną grupę dyfeomorfizmów.

Twierdzenie 7 Gładkie pole wektorowe X na M definiuje lokalną jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów φ^X taką, że

$$X(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^X(t, q). \quad (27)$$

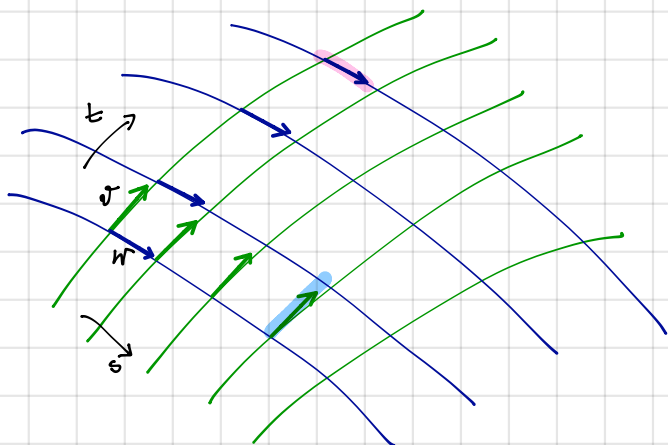
Dowód: Dowód oparty jest na twierdzeniu Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności wraz z twierdzeniem o zależności rozwiązania od warunków początkowych. W układzie współrzędnych nasze równanie różniczkowe ma postać

$$X^i(x^j(t)) = \frac{dx^i}{dt}$$

Jest to układ równań różniczkowych na \mathbb{R}^n . Z Twierdzenia Cauchy'ego wynika zatem istnienie krzywej całkowej $t \mapsto \varphi_t(q)$ określonej na pewnym otoczeniu I zera w \mathbb{R} z warunkiem początkowym $\varphi_0(q) = q$. Z jednoznaczności rozwiązania wynika także, że jeśli tylko wszystkie napisy mają sens to $\varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q)$. Z twierdzenia o zależności rozwiązania od warunków początkowych wynika, że dla każdego punktu $q \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}_q \subset M$ oraz odcinek zawierający $I_q \subset \mathbb{R}$ zawierający 0 taki, że rozwiązanie z warunkiem początkowym $(s, p) \in I_q \times \mathcal{O}_q$ istnieje dla czasu z odcinka $[s - \epsilon, s + \epsilon]$ oraz ϵ jest niezależny od (s, p) . Oznacza to, że Ω na którym określona jest jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów może być wzięte jako $\Omega = \bigcup_{q \in M} (I_q \times \mathcal{O}_q)$. \square

Wzór na różniczkę jednorodną:

$$v, w \in T_q M \quad \alpha \in \Omega^1(M) \quad \chi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$



$$v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \chi(\cdot, 0)$$

$$w = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \chi(0, \cdot)$$

$$\text{---} t^{(1,0)} \chi(0, s)$$

$$\text{---} t^{(0,1)} \chi(t, 0)$$

$$d\alpha(v, w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \alpha(\chi(t, 0)), t^{(0,1)} \chi(t, 0) \rangle - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \langle \alpha(\chi(0, s)), t^{(1,0)} \chi(0, s) \rangle$$

Rachunkiem we współrzędnych sprawdzamy że wzór jest poprawny:

$$\alpha = \alpha_i(x) dx^i \quad v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad w = w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \chi^i(t, s) \text{ jest takie, że } \frac{\partial}{\partial t} \chi^i(0, 0) = v^i$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \chi^i(0, 0) = w^i$$

$$t^{(1,0)} \chi(0, s) = \frac{\partial}{\partial t} \chi^i(0, s) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$t^{(0,1)} \chi(t, 0) = \frac{\partial}{\partial s} \chi^i(t, 0) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$d\alpha(v, w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[\alpha_i(\chi(t, 0)) \frac{\partial}{\partial s} \chi^i(t, 0) \right] - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left[\alpha_i(\chi(0, s)) \frac{\partial}{\partial t} \chi^i(0, s) \right] =$$

$$= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t} \chi^k(0, 0) \frac{\partial}{\partial s} \chi^i(0, 0) + \alpha_i(\chi(0, 0)) \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \chi^i(0, 0) - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial s} \chi^l(0, 0) \frac{\partial}{\partial t} \chi^j(0, 0) +$$

$$- \alpha_j(\chi(0, 0)) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \chi^j(0, 0) =$$

upraszcza się ze względu na skutek symetrii drugich pochodnych cząstkowych

$$= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} (q) v^k w^i - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^l} (q) w^l v^j = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} (q) - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^i} (q) \right) v^k w^i \quad \text{o.k.}$$

Jak to się różni od wzoru Cartana?

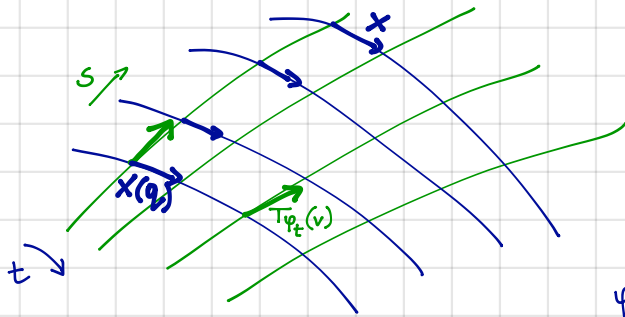
POCHODNA LIEGO JEDNOFORMY

DEFINICJA: $\mathcal{L}_X \alpha(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi_t^* \alpha(q) - \alpha(q))$

TWIERDZENIE: $\mathcal{L}_X \alpha = d i_X \alpha + i_X d \alpha$

DOWÓD:

Niech $v \in T_q M$, niech także $s \mapsto \gamma(s)$ będzie krzywą reprezentującą v . Weźmy $\chi(t, s) = \varphi_t(\gamma(s))$.



$$\begin{aligned} (i_X d\alpha)(v) &= d\alpha(\chi(q), v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \alpha(\chi(t, 0)), t^{(0,1)} \chi(t, 0) \rangle - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \langle \alpha(\chi(0, s)), t^{(1,0)} \chi(0, s) \rangle = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \varphi_t^* \alpha, v \rangle - \frac{d}{ds} \langle \alpha(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \varphi_t^* \alpha, v \rangle - \langle d(i_X \alpha), v \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \varphi_t^* \alpha, v \rangle - \langle d i_X \alpha, v \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_X \alpha = d i_X \alpha + i_X d \alpha$

Wróćmy teraz na chwilę do **wzoru Tulczyjewa**. Przypomina on nieco inny wzór (Cartana) na różniczkę formy obliczoną na dwóch polach wektorowych. Dla jednoformy przyjmuje on postać

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) + \alpha([X, Y]).$$

Pierwszy i drugi składnik tego wzoru możemy wyznaczyć posługując się odpowiednio dobranym odwzorowaniem podobnym do χ . Oznaczmy przez φ_t potok pola X , zaś przez ψ_s potok pola Y . Na przykład $X\alpha(Y)$ to

$$X\alpha(Y) = \frac{d}{dt} \langle \alpha(\varphi_t(q)), T\varphi_t(Y(q)) \rangle$$

Wektor $T\varphi_t(Y(q))$ to $t^{(0,1)} \chi(t, 0)$ dla odwzorowania $\chi(t, s) = \varphi_t(\psi_s(q))$. Składnik $Y\alpha(X)$ to

$$Y\alpha(X) = \frac{d}{ds} \langle \alpha(\psi_s(q)), T\psi_s(X(q)) \rangle$$

Wektor $T\psi_s(X(q))$ to $t^{(1,0)} \tilde{\chi}(0, s)$ dla odwzorowania $\tilde{\chi}(t, s) = \psi_s(\varphi_t(q))$. Odwzorowania χ i $\tilde{\chi}$ nie zazwyczaj pokrywają się. Konkretny przykład zobaczą państwo na ćwiczeniach. Miarą braku zgodności jest właśnie $[X, Y]$, który jako poprawka pojawia się w trzeciej części wzoru.

Kolejnym zadaniem będzie znalezienie pochodnej Liego funkcji na rozmaiitości f . Definicja formalna jest bardzo podobna jak dla jednoformy:

$$(\mathcal{L}_X f)(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\varphi_t(q)) - f(q))$$

Jest dość oczywiste, że

$$\mathcal{L}_X f = Xf = \mathbf{d}f(X) = \iota(X)\mathbf{d}f$$

Sprawdźmy teraz jak pochodna Liego działa na iloczyn $f\alpha$. Iloczyn funkcji i jednoformy to też jednoforma, więc możemy użyć świeżo wyprowadzonego wzoru:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f\alpha) &= \iota(X)\mathbf{d}(f\alpha) + \mathbf{d}\iota(X)(f\alpha) = \iota(X)(\mathbf{d}f \wedge \alpha + f\mathbf{d}\alpha) + \mathbf{d}(f\iota(X)\alpha) = \\ &= (\iota(X)\mathbf{d}f)\alpha - (\iota(X)\alpha)\mathbf{d}f + f\iota(X)\mathbf{d}\alpha + \iota(X)\alpha\mathbf{d}f + f\mathbf{d}(\iota(X)\alpha) = \\ &= (\mathcal{L}_X f)\alpha + f(\iota(X)\mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}(\iota(X)\alpha)) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy coś w rodzaju reguły Leibniza:

$$\mathcal{L}_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha.$$

Pora rozszerzyć pojęcie pochodnej Liego na wieloformy. Formalnie definicja wygląda identycznie.

Definicja 26 Pochodną Liego k -formy ω w kierunku pola X nazywamy k -formę, której wartość w punkcie q dana jest wzorem

$$(\mathcal{L}_X \omega)(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* \omega)(q) - \omega(q))$$

Zobaczymy jak to działa na iloczynie zewnętrznym:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) - \alpha \wedge \beta) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^*\alpha \wedge \varphi_t^*\beta - \varphi_t^*\alpha \wedge \beta + \varphi_t^*\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \beta) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^*\alpha \wedge (\varphi_t^*\beta - \beta) + (\varphi_t^*\alpha - \alpha) \wedge \beta) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^*\alpha \wedge \left(\frac{\varphi_t^*\beta - \beta}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t} \right) \wedge \beta = \\ &= (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta) \end{aligned}$$

Tym razem to już nie „coś w rodzaju”, tylko poprostu reguła Leibniza. Wygląda na to, że **pochodna Liego jest różniczkowaniem algebry zewnętrznej form różniczkowych**. Ze względu na przemienność \mathbf{d} i pull-backu obowiązuje także wzór

$$\mathcal{L}_X \mathbf{d}\omega = \mathbf{d}\mathcal{L}_X \omega.$$

Wzór wyprowadzony wcześniej dla jednoform okazuje się obowiązywać także dla wieloform. Rachunek przeprowadzimy na współrzędnych i skorzystamy z liniowości:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= \\ (\mathcal{L}_X f)(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) + f \sum_{j=1}^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_X dx^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} &= \\ (Xf)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + f \sum_{j=1}^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} & \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota(X)d(fdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= \iota(X)df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\ &= (Xf)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + df \wedge \left(\sum_{j=1}^k (-1)^j X^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} d(\iota(X)fdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= \\ d\left(f \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} X^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) &= \\ df \wedge \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} X^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) &+ f \sum_{j=1}^k dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dX^{i_j} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned} \quad (30)$$

Dodając (29) i (30) otrzymujemy (28), gdyż wyrazy zaznaczone na zielono upraszczają się. Podsumujmy własności pochodnej Liego w działaniu na formy różniczkowe:

Fakt 15 1. Pochodna Liego k -formy jest k -formą,

$$2. \text{ Pochodna Liego jest operacją liniową, tzn dla } a, b \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}_X(a\alpha + b\beta) = a\mathcal{L}_X\alpha + b\mathcal{L}_X\beta,$$

$$3. \text{ Spełniona jest reguła Leibniza } \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta,$$

$$4. \text{ W działaniu na formy prawdziwy jest wzór } \mathcal{L}_X = \iota(X)d + d\iota(X).$$

Pozostaje sprawdzenie jak pochodna Liego działa na pola wektorowe.

Definicja 27

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q))) - Y(q)).$$

Zgodnie z definicją transportujemy wartość pola Y z punktu $\varphi_t(q)$ do punktu q . Tym razem musimy użyć odwzorowania stycznego $T\varphi_{-t}$. Powstałą krzywą jest krzywą w przestrzeni wektorowej $T_q M$. Wartość pochodnej Liego to wektor styczny do tej krzywej.

Fakt 16

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Dowód:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(q)f) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(\varphi_t(q))f + Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f) = \end{aligned}$$

Fragment zaznaczony na czerwono to

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f) = X(Yf)$$

Fragment zaznaczony na niebiesko to

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(\varphi_t(q))f) = \lim_{t \rightarrow 0} Y(\varphi_t(q)) \left(\frac{f \circ \varphi_{-t} - f}{t} \right) = -Y(Xf)$$

Ostatecznie

$$\mathcal{L}_X Y f = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f$$

Z dowolności f wynika teza. \square

