$$\nabla_i \partial_j = +\Gamma^k_{ij}\partial_k \qquad \nabla_i d\varphi^j = -\Gamma^j_{ik} d\varphi^k$$

$$\nabla_k (g_{ij}\, d\varphi^i \otimes d\varphi^j) = \partial_k g_{ij}\, d\varphi^i \otimes d\varphi^j + g_{ij} (\nabla_k d\varphi^i) \otimes d\varphi^j + g_{ij}\, d\varphi^i \otimes (\nabla_k d\varphi^j) =$$

$$= \partial_k g_{ij}\, d\varphi^i \otimes d\varphi^j + g_{ij} (-\Gamma^i_{k\ell} d\varphi^\ell \otimes d\varphi^j) + g_{ij}\, d\varphi^i \otimes (-\Gamma^j_{k\ell} d\varphi^\ell) =$$

$$= \partial_k g_{mn}\, d\varphi^m \otimes d\varphi^n - g_{in}\Gamma^i_{km}\, d\varphi^m \otimes d\varphi^n - g_{mj}\Gamma^j_{kn}\, d\varphi^m \otimes d\varphi^n =$$

$$= \underbrace{(\partial_k g_{mn} - g_{in}\Gamma^i_{km} - g_{mj}\Gamma^j_{kn})}_{(\nabla_i g)_{mn}} d\varphi^m \otimes d\varphi^n$$

Przypominamy, że $e_a = A^i_a \partial_i + A^\alpha_a n_\alpha$. Macierz odwrotną do A oznaczmy chwilowo B

$$\partial_i = B^a_i e_a \qquad g_{ij} = (\partial_i | \partial_j) = B^a_i B^b_j \, g_{ab} \leftarrow \text{stałe}$$

$$\Gamma^j_{ik} = \partial_i((A^{-1})^a_k) A^j_a \qquad \Gamma^j_{ik} = (\partial_i B^a_k) A^j_a$$

$$(\nabla_i g)_{mn} = \partial_i (B^a_m B^b_n g_{ab}) - B^a_k B^b_n g_{ab} (\partial_i B^c_m) A^k_c +$$
$$- B^a_m B^b_j g_{ab} (\partial_i B^c_n) A^j_c$$

$$= (\partial_i B^a_m) B^b_n g_{ab} - (\partial_i B^c_m) B^a_k B^b_n A^k_c g_{ab} +$$
$$B^a_m (\partial_i B^b_n) g_{ab} - (\partial_i B^c_n) B^a_m B^b_j A^j_c$$

$$(\partial_i B^a_m)[B^b_n g_{ab} - B^c_k B^b_n A^k_a g_{cb}] =$$
$$= (\partial_i B^a_m) B^b_n [g_{ab} - B^c_k A^k_a g_{cb}] = (\partial_i B^a_m) B^b_n [(e_a|e_b) - B^c_k A^k_a (e_c|e_b)]$$
$$= (\partial_i B^a_m) B^b_n (e_a - B^c_k A^k_a e_c | e_b) = (\partial_i B^a_m) B^b_n (e_a - A^k_a \underbrace{B^c_k e_c}_{\partial_k} | e_b)$$
$$= (\partial_i B^a_m)(\underbrace{e_a - A^k_a \partial_k}_{A^\alpha_a n_\alpha} | \partial_n) = (\partial_i B^a_m) A^\alpha_a \underbrace{(n_\alpha | \partial_n)}_{=0}$$

Niebieskie liczymy tak samo. Wniosek $(\nabla_i g)_{mn} = 0$, tzn $\nabla g = 0$

$$\nabla_v g = 0.$$

Wypiszemy warunek na współrzędne ∇g permutując cyklicznie wkaźniki

$$\begin{aligned}
0 = (\nabla_i g)_{jk} &= \partial_i g_{jk} - \Gamma^l_{ij} g_{lk} - \Gamma^l_{ik} g_{jl} \\
0 = (\nabla_j g)_{ki} &= \partial_j g_{ki} - \Gamma^l_{jk} g_{li} - \Gamma^l_{ji} g_{kl} \\
0 = (\nabla_k g)_{ij} &= \partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il}
\end{aligned}$$

Od pierwszego wiersza odejmujemy drugi i trzeci. Korzystamy z symetrii symboli Chrisoffela względem dolnych wkaźników oraz z symetrii tensora metrycznego. Czerwone i niebieskie wyrazy upraszczają się i otrzymujemy

$$0 = \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} + 2\Gamma^l_{jk} g_{li}$$

Wyznaczamy

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}\right). \tag{51}$$

Symbole Christoffela wyrażają się przez wyrazy macierzowe metryki oraz ich pochodne wzdłuż M. Oznacza to, że istotnie pochodna kowariantna jest wewnętrzna – związana z metryką a nie z zanurzeniem.

Rozważmy przestrzeń styczną do rozmaitości M wymiaru k zanurzonej w afinicznej przestrzeni Euklidesowej A. Załóżmy, że M jest poziomicą gładkiego odwzorowania $F: A \to \mathbb{R}^{n-k}$. Przyjmujemy, że A ma wymiar n. Symbolem $\mathbb{V}$ będziemy oznaczać przestrzeń modelową dla A.

W ustalonym punkcie $q \in M$ przestrzeń styczna T_qM jest k-wymiarową podprzestrzenią wektorową w $\mathbb{V}$. Oznaczmy tę podprzestrzeń W_q. Indeks q wskazuje, że podprzestrzeń ta zmienia się od punktu do punktu. Istotnie

$$W_q = \ker F'(q)$$

$$TM \subset TA \simeq A \times \mathbb{V}$$

$$TM = \{(q, w) : F(q) = 0, \quad w \in \ker F'(q)\}$$

Wektory styczne do TA, czyli wektory styczne do krzywych $\mathbb{R} \ni t \longmapsto (q(t), w(t)) \in TA$ w naturalny sposób możemy identyfikować z elementami $A \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ postaci $(q(0), w(0), \dot{q}(0), \dot{w}(0))$. Które z nich są styczne do TM? Krzywa $(t \longmapsto (q(t), w(t))$ jest w TM jeśli

$$F(q(t)) = 0 \quad i \quad \langle F'(q(t)), w(t) \rangle = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\langle F'(q(0)), \dot{q}(0) \rangle = 0 \qquad F''(q(0))(w(0), \dot{q}(0)) + \langle F'(q(t)), \dot{w}(0) \rangle = 0.$$

tzn. $\dot{q}(0) \in W_q$

Podsumowując

$(q, w, v, u) \in TTM$ jeśli

$q \in M$ tzn $F(q) = 0$

$w \in W_q$ tzn $\langle F'(q), w \rangle = 0$

$v \in W_q$ tzn $\langle F'(q), v \rangle = 0$

$u \in U_{q,v,w}$ tzn $\langle F'(q), u \rangle + F''(q)(v, w) = 0$.

$U_{q,v,w}$ jest afiniczną podprzestrzenią w V modelowaną na W_q.

W przestrzeni TM przez dowolny punkt (q, w) przechodzą wyróżnione krzywe, które nazwiemy wertykalnymi albo pionowymi. Krzywa jest pionowa jeśli jej obraz leży nad jednym punktem w q, tzn

$t \longmapsto (q, w(t)) \quad w(0) = w$

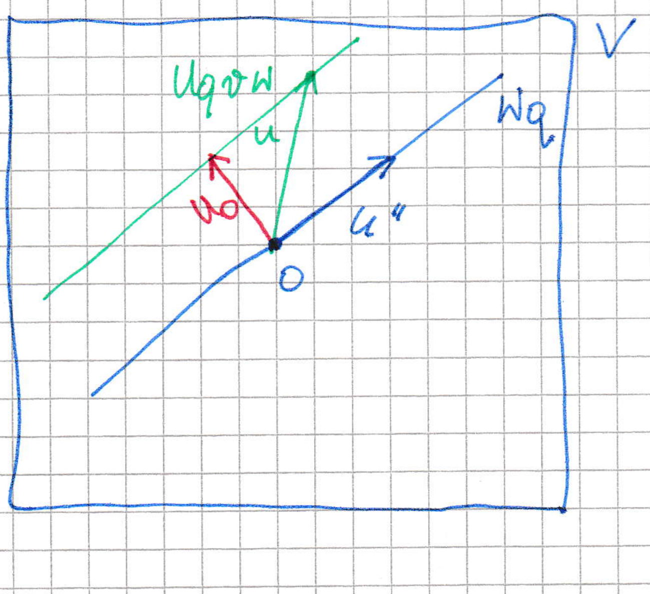
Wektory styczne do tych krzywych są postaci $(q, w, 0, \dot{w}(0))$. Tworzą one k-wymiarową podprzestrzeń w $T_{(q,w)}TM$. Niestety, inaczej niż w TTA nie ma naturalnej dopełniającej przestrzeni wektorów poziomych. W TTA pionowe są wektory $(q, w, 0, v)$ a poziome $(q, w, v, 0)$. Krzywe poziome to te, które zmieniają punkt zaczepienia a nie zmieniają wektora w. $t \longmapsto (q(t), w)$

2

O tych krzywych mówi się, że to przesunięcie równoległe wektora w wzdłuż $q(\cdot)$. Niestety na M to nie działa. Jeśli $(q,\omega)\in TM$, to nie ma gwarancji, że $(q(t),\omega)\in TM$, zazwyczaj tak nie jest. Krzywe horyzontalne można zdefiniować na M korzystając z ~~przesunięcia~~ iloczynu skalarnego. Powiemy, że $(q,\omega,v,u)\in TTM$ jest horyzontalny jeśli $u=u_0$ jest elementem przecięcia $U_{q,v,\omega}\cap W_q^{\perp}$. Łatwo sprawdzić, że jeśli $U_{q,v,\omega}$ jest istotnie afiniczne, tzn różne od W_q to takie u_0 jest dokładnie jedno. Dowolny element TTM można rozłożyć na sumę

$$(q,\omega,v,u)=(q,\omega,v,u_0+u'')=$$

$$=\underbrace{(q,\omega,v,u_0)}_{\text{poziomy}}+\underbrace{(q,\omega,0,u'')}_{\text{pionowy}}$$



Warto tu zauważyć że $U_{q0\omega}=W_q$ zatem obie składowe, pozioma i pionowa należą do TTM.

Krzywą poziomą w TM przechodzącą przez (q, w) albo przesunięciem równoległym wektora w wzdłuż $t \mapsto q(t)$ na M nazwiemy krzywą przechodzącą przez (q, w) dla $t=0$ i taką, że wektory styczne do niej są horyzontalne. Wkrótce wyprowadzimy równanie na przesunięcie równoległe we współrzędnych.

Najpierw zastanówmy się jednak co to wszystko ma wspólnego z pochodną kowariantną? Niech pole wektorowe X będzie traktowane jak odwzorowanie $M \to V$, $q \mapsto X(q)$ gdzie $X(q) \in W_q < V$. Wtedy $D_v X$ to drugi element odwzorowania stycznego, a właściwie wartości odwzorowania stycznego TX na v.

$$X: M \to V \quad , \quad TX: TM \to TV = V \times V$$
$$(q, v) \mapsto (X(q), D_v X)$$

W całej ogólności, jeśli $X: M \to TM$
$q \mapsto (q, X(q))$ to $TX: TM \longrightarrow TTM$

$$(q, v) \longmapsto (q, X(q), v, D_v X)$$

Wektor $TX(q, v)$ można podzielić na części pionowe i poziome

$$(q, X(q), v, D_v X) = (q, X(q), v, D_v X^{\perp} + D_v X^{\parallel})$$

$$= (q, (X(q)), v, D_v X^{\perp} + \nabla_v X) =$$

$$= (q, X(q), v, D_v X^{\perp}) + \underbrace{(q, X(q), 0, \nabla_v X)}_{\text{pochodna kowariantna to część pionowa}}$$

Istnienie rozkładu TTM na część pionową i poziomą daje istnienie podniesienia horyzontalnego.

horyzontalnie

$$(q, v)^{h}_{(q,w)} = (q, w, v, u_0)$$

podnosimy wektor (q, v)

do punktu (q, w)

Zastanówmy się teraz jaki warunek musi spełniać krzywa

$$t \longmapsto (q(t), w(t)) \text{ żeby była pozioma}$$

Dane wejściowe to znana krzywa $t \longmapsto q(t)$ i wartości $w(0) = \bar{w}$. Innymi słowy chcemy przesuwać równolegle wektor w wzdłuż $q(\cdot)$. Krzywa jest horyzontalna jeśli wektor styczny jest horyzontalny, tzn

$$(q(t), w(t), \dot{q}(t), \dot{w}(t)) \qquad \dot{w}(t) \in W^{\perp}_{q(t)}$$

$$\dot{w}(t) = \dot{w}(t)^a e_a = \underbrace{\dot{w}(t)^a A^i_a(q(t))\partial_i}_{\text{to ma być } 0} +$$

$$+\dot{w}(t)^a A^\alpha_a n_\alpha$$

$$\forall i \quad \dot{w}(t)^a A^i_a(q(t)) = 0$$

~~$w^a(t)$~~ Wiadomo, że $w(t) \in W_{q(t)}$, tzn $w(t) = w^k(t)\partial_k$

$$w^a(t) = (A^{-1}(q(t)))^a_k w^k(t) = B(q(t))^a_k w^k(t)$$

$$\dot{w}^a(t) = \partial_l B^a_k \dot{q}^l w^k + B^a_k \dot{w}^k$$

$$(\partial_l B^a_k \dot{q}^l w^k + B^a_k \dot{w}^k) A^i_a = 0$$

$$\underbrace{A^i_a(\partial_l B^a_k)}_{\Gamma^i_{lk}} \dot{q}^l w^k + \underbrace{A^i_a B^a_k}_{\delta^i_k} \dot{w}^k = 0$$

$$\Gamma^i_{lk} \dot{q}^l w^k + \dot{w}^k = 0$$

$$\dot{w}^k = -\Gamma^l_{lk} \dot{q}^l w^k$$

dane

Jest to układ równań liniowych na funkcje w^k.

CO Z CZYM POWIĄZANIE WIĄŻE?

Zdefiniowaliśmy już pochodną kowariantną i stowarzyszyliśmy z nią rozkład $T(TM)$ na część pionową i poziomą. Zdefiniowaliśmy już także przesunięcie równoległe. Cały czas nie wiadomo jednak co to w końcu jest ta koneksja czyli powiązanie i co z czym powiązanie wiąże.

Większość „użytkowników" geometrii różniczkowej powiedzieli by pewnie że koneksja to to samo co pochodna kowariantna. I mieli by rację w tym sensie że koneksja liniowa definiuje pochodną kowariantną i odwrotnie. To wszystko na wiązkach wektorowych, np TM. Nieco ogólniej powiedzieć można, że koneksja jest to rozkład przestrzeni stycznej do wiązki na podprzestrzeni pionową i poziomą.

Niech $E \xrightarrow{\tau} M$ będzie wiązką wektorową, tzn $\tau^{-1}(q) = E_q$ jest przestrzenią wektorową i dopuszczalne zamiany zmiennych (x^i, y^a) są liniowe tzn

$$x^{i'} = x^{i'}(x^j)$$

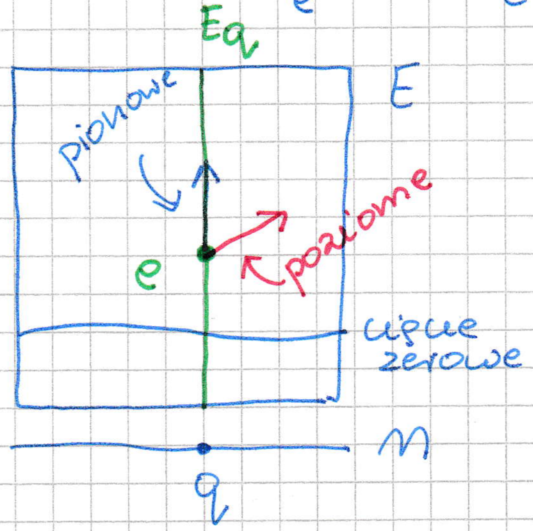
$$y^{a'} = T^{a'}{}_b \, y^b$$

funkcje od x.

Wektory pionowe styczne do E są postaci $y^a \partial_a$ – są styczne do włókna.
Wektory poziome nie są wyróżnione, chyba że je wyróżnimy, tzn. podamy koneksję

$$T_e E = V_e E \oplus H_e E$$

wektory poziome



Na wiązce wektorowej żądamy zazwyczaj, żeby koneksja była liniowa, to znaczy żeby była zgodna ze strukturą wiązki. Co to znaczy? Strukturą fundamentalną dla wiązki wektorowej jest mnożenie wektorów przez liczby. Okazuje się że przy założeniu gładkości z mnożenia przez liczby można „odzyskać" dodawanie wektorów. W każdym razie kluczowe jest odwzorowanie

$$\forall t \quad h_t : E \to E \quad h_t(e) = te$$

a właściwie $h : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \quad (t, e) \longmapsto te$

Koneksja jest liniowa jeśli

$$\forall_t \quad \boxed{Th_t\left(H_e E\right) = H_{h_t(e)} E}$$

Sprawdźmy co to znaczy we współrzędnych. W punkcie $e \in E_q$ o współrzędnych (x^i, y^a) wektor styczny to

$$\dot{x}^i \partial_i + \dot{y}^a \partial_a$$

pionowe to takie, które mają współczynniki tylko przy ∂_a. Rozkład na części pionowe i poziome musi więc być postaci

$$\cancel{\dot{x}^i \partial_0} \quad \dot{x}^i \partial_i + \dot{y}^a \partial_a + \dot{x}^i \partial_i - C^a(x, y, \dot{x}, \dot{y})\partial_a + \underbrace{(C^a(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y}^a)}_{\text{to ma być liniowe względem } \dot{x} \text{ i } \dot{y} \to \text{rzut}} \partial_a =$$

$$C^a(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = C^a_i(x, y)\dot{x}^i + C^a_b(x, y)\dot{y}^b$$

$$= \boxed{\left[x^i \partial_i - C^a_i(x,y)\dot{x}^i \partial_a - C^a_b(x, y)\dot{y}^b \partial_b\right]} +$$

$$+ \left[C^a_i(x, y)\dot{x}^i + C^a_b(x, y)\dot{y}^b + y^b\right]\partial_a$$

To ma być rzut więc $C^a_b(x, y) = 0$.

Część horyzontalna ma być niezmiennicza względem Th_t

$$h_t(x^i, y^a) = (x^i, ty^a)$$

$$\cancel{Th_t(x^i, y^a) = (x,}$$

$$Th_t(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b) = (x^i, ty^a, \dot{x}^j, t\dot{y}^b)$$

$$Th_t\left(x^i, y^a, \dot{x}^j, -C^a_i(x,y)\dot{x}^i\right) =$$

$$= \left(x^i, ty^a, \dot{x}^j, -tC^a_i(y,x)\dot{x}^i\right) =$$

$$= \left(x^i, ty^a, \dot{x}^j, -C^a_i(x,ty)\dot{x}^i\right)$$

warunek niezmienniczości

To znaczy C^a_i zależy od y liniowo $C^a_{bi}(x)y^b\dot{x}^i$

Rozkład jest postaci

to jest część pozioma

$$\dot{x}^i\partial_i + \dot{y}^a\partial_a = \left[\dot{x}^i\partial_i - C^a_{bi}(x)y^b\dot{x}^i\partial_a\right] +$$

$$+ \left[C^a_{bi}(x)y^b\dot{x}^i + \dot{y}^a\right]\partial_a$$

To są Symbole Christoffela $\Gamma^a_{bi}(x)$

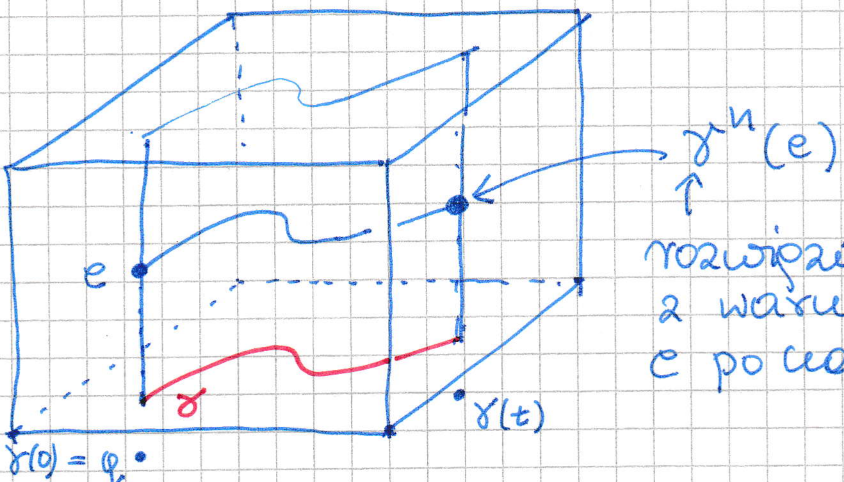
Ustalmy krzywą w M $t \overset{\gamma}{\longmapsto} (x^i(t))$ i sprawdźmy jak wygląda warunek na krzywą w E, która leży nad γ i jest pozioma:

$\dot{y}^b$ takie że $\underbrace{\dot{y}^b = -\Gamma^b_{ci}y^b\dot{x}^i}$

dane

liniowy układ równań na funkcje y^i

Rozwiązanie zależy liniowo od warunków początkowych



rozwiązanie z warunkiem początkowym e po czasie t.

Mamy liniowe odwzorowanie między

$E_{\gamma(0)}$ a $E_{\gamma(t)}$ $\quad E_{\gamma(0)} \ni e \longmapsto \gamma^u(e) \in E_{\gamma(t)}$

to odwzorowanie jest izomorfizmem liniowym.

Koneksja wiąże włókna w punkcie q_1 i q_2 izomorfizmem liniowym zależnym od krzywej w M łączącej q_1 i q_2

Dla E = TM koneksja daje więc izomorfizm między $T_{q_1}M$ i $T_{q_2}M$ ale zależny od krzywej łączącej te dwa punkty. Dla różnych krzywych możemy dostać różne izomorfizmy.

M