GR1 L.2.

Wektory styczne, kowektory M - rozmaitość gładka, $C^\infty(M)$ algebra funkcji gładkich na M, $C^\infty(\mathcal{O})$ algebra funkcji gładkich na zbiorze otwartym $\mathcal{O}$ zawartym w M.

Ustalmy punkt $x \in M$. $\gamma : I \longrightarrow M$, $\gamma(0) = x$, $I \subset \mathbb{R}$

odcinek otwarty zawierający 0

krzywa gładka

W zbiorze $C^\infty(M)$ wprowadzamy relację równoważności związaną z punktem x: mówimy, że dwie funkcje f i f' są równoważne w x wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krzywej γ jak wyżej
$$\frac{d}{dt} f\circ\gamma\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f'\circ\gamma\Big|_{t=0}.$$

Klasę równoważności funkcji f oznaczamy $df(x)$ i nazywamy różniczką funkcji f w punkcie x.
Zbiór $C^\infty(M)$ jest w szczególności przestrzenią wektorową. Struktura przestrzeni wektorowej „przeżywa" dzielenie przez relację równoważności ze względu na to, że różniczkowanie po t jest liniowe.
Innymi słowy możemy zdefiniować strukturę przestrzeni wektorowej na klasach równoważności za pomocą reprezentantów:

$$df(x) + dg(x) := d(f+g)(x)$$
$$\lambda df(x) := d(\lambda f)(x)$$

$f \sim f'$, $g \sim g'$ tzn $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}(f'\circ\gamma)(0)$, $\frac{d}{dt}(g\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}(g'\circ\gamma)(0)$

wtedy

$f+g \sim f'+g'$ $\quad \frac{d}{dt}\big((f+g)\circ\gamma\big)(0) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) + \frac{d}{dt}(g\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}(f'\circ\gamma)(0) + \frac{d}{dt}(g'\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}\big((f'+g')\circ\gamma\big)(0)$

Przestrzeń wektorową różniczek funkcji f w punkcie x oznaczamy $T^*_x M$.

STWIERDZENIE $T^*_x M$ jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową wymiaru n równego wymiarowi rozmaitości.

DOWÓD: Weźmy układ współrzędnych $\varphi : (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ w otoczeniu punktu x. Najwygodniej wybrać taki, żeby $\varphi^1(x) = \dots = \varphi^n(x) = 0$. Pokażemy, że różniczki $d\varphi^1(x), \dots, d\varphi^n(x)$ są liniowo niezależne oraz że tworzą bazę $T^*_x M$. Weźmy
$$\lambda_1 d\varphi^1(x) + \dots + \lambda_n d\varphi^n(x) = 0$$
oznacza to, że funkcja $\lambda_1\varphi^1 + \dots + \lambda_n\varphi^n$ jest równoważna funkcji 0 w punkcie x.

Niech γ_i oznacza krzywą współrzędnościową, tzn $\gamma_i(0) = x$, $\varphi^k(\gamma_i(t)) = t \cdot \delta^k_i$.
$$(\lambda_1\varphi^1 + \dots \lambda_n\varphi^n)\circ\gamma_i = \lambda_1\varphi^1\circ\gamma_i + \dots + \lambda_n\varphi^n\circ\gamma_i = \lambda_i t$$
$$\frac{d}{dt}(\lambda_1\varphi^1 + \dots + \lambda_n\varphi^n)\circ\gamma_i(0) = \frac{d}{dt}(\lambda_i t)\Big|_{t=0} = \lambda_i$$
Równoważność funkcji stałej $= 0$ oznacza $\lambda_i = 0$.

Różniczki funkcji współrzędnościowych tworzą układ liniowo-niezależny. Teraz pokażemy, że $df(x)$ może być zapisane jako kombinacja liniowa różniczek $d\varphi^1 \dots d\varphi^n$. Rozważmy złożenie funkcji f z parametryzacją daną przez układ współrzędnych $\varphi^{-1} : V \longrightarrow \mathcal{O}$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} \subset M$.

$f\circ\varphi^{-1}$ jest funkcją n zmiennych rzeczywistych. Łatwo stwierdzić, że
$$\frac{\partial}{\partial\varphi^k}(f\circ\varphi^{-1})\Big|_0 = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma_i)(0) =: \frac{\partial f}{\partial\varphi^i}\Big|_x$$

Pokażemy że f jest równoważna w punkcie x funkcji $\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\Big|_x \varphi^1 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\varphi^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_n}\Big|_x \varphi^n = \tilde{f}$

Istotnie, rozważmy krzywą $\gamma : I \longrightarrow M$ $\gamma(0) = x$,

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{f\circ\varphi^{-1}}_{\text{funkcja na } \mathbb{R}^n}\circ\overbrace{\varphi\circ\gamma}^{\text{krzywa w } \mathbb{R}^n}\Big)(0) = \underbrace{\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial\varphi^i}(0)}_{\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\big|_x}\frac{d}{dt}(\varphi^i\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}(\tilde{f}\circ\gamma)(0)$$

Wiemy, że $d\tilde{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\Big|_x d\varphi^1(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\Big|_x d\varphi^n(x)$ więc $\boxed{df(x) = d\tilde{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\Big|_x d\varphi^1(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\Big|_x d\varphi^n(x)}$

Pokazaliśmy, że T_x^*M jest rozpięte przez $d\varphi^1(x) \dots d\varphi^n(x)$. Stwierdzenie zostało dowiedzione. ∎

T_x^*M nazywamy przestrzenią kostyczną do M w punkcie x. Jest to n wymiarowa przestrzeń wektorowa. Zbiór $\bigcup_{x\in M} T_x^*M$ oznaczamy T^*M i nazywamy wiązką kostyczną do M. Strukturą T^*M zajmiemy się wkrótce.

Mając T_x^*M - skończenie wymiarową przestrzeń wektorową możemy oczywiście zdefiniować dualną do niej przestrzeń, którą oznaczymy T_xM i nazwiemy przestrzenią styczną do M w punkcie x. Z definicji jest to skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa. Zajmiemy się teraz poszukiwaniem wygodnych realizacji TM w mniej abstrakcyjnym języku.

Zauważmy, że każda krzywa $\gamma : I \longrightarrow M$ taka, że $\gamma(0) = x$ definiuje funkcjonał liniowy na przestrzeni T_x^*M wzorem

$$T_x^*M \ni df(x) \longmapsto \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) \in \mathbb{R}$$

STWIERDZENIE: Każdy funkcjonał liniowy na T_x^*M zadany jest przez pewną krzywą

DOWÓD Dowód prowadzimy przy użyciu współrzędnych. Niech $p \in T_x^*M$ $p = p_1 d\varphi^1(x) + \dots + p_n d\varphi^n(x)$. Dowolny funkcjonał liniowy na T_x^*M można wyrazić we współrzędnych

$$(p_1, \dots, p_n) \xmapsto{v} v^1 p_1 + v^2 p_2 + \dots + v^n p_n \in \mathbb{R}$$

Rozważmy krzywą $\gamma_v : I \longrightarrow M$ $\gamma_v(t) = \varphi^{-1}(v^1 t, v^2 t, \dots, v^n t)$, tzn $\varphi^i(\gamma_v(t)) = v^i t$

Biorąc reprezentanta p postaci

$f_p(x) = p_1\varphi^1(x) + \dots + p_n\varphi^n(x)$ dostajemy

$\frac{d}{dt}(f_p\circ\gamma_v)(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(p_1 v^1 t + \dots + p_n v^n t) = p_1 v^1 + \dots + p_n v^n$ Funkcjonał v związany jest więc z krzywą γ_v. Oczywiście wiele krzywych prowadzi do tego samego funkcjonału: W zbiorze krzywych przechodzących przez x dla $t=0$ wprowadzamy relację równoważności:

$$\gamma \sim \gamma' \iff \forall f \in C^\infty(M) \quad \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma')(0)$$

Łatwo zauważyć że dwie krzywe są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy definiują ten sam funkcjonał liniowy na T_x^*M. Istnieje więc wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wektorami stycznymi a klasami równoważności krzywych.

Funkcjonał, który odpowiada krzywej γ nazywamy wektorem stycznym do γ w $t=0$ i oznaczamy $\dot{\gamma}(0)$ lub $t\gamma(0)$. Zauważmy, że struktura wektorowa w T_xM nie pochodzi od reprezentantów, ale jest zdefiniowana poprzez dualność.

Układ współrzędnych definiuje bazę $d\varphi^1 \dots d\varphi^n$. Oznaczmy $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ wektor styczny do krzywej $t \longmapsto \bar{\varphi}^1(0, \dots, \underset{i}{t}, \dots 0)$.

STWIERDZENIE: $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}\right)$ jest bazą w T_x^*M dualną do $d\varphi^1 \dots d\varphi^n$.

DOWÓD: Wystarczy pokazać

$$\left\langle d\varphi^i, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle = \delta^i_j \quad : \quad \left\langle d\varphi^i, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle = \frac{d}{dt} \varphi^i\left(\bar{\varphi}^1(0, \dots, t, \dots 0)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \delta^i_j t = \delta^i_j \qquad \blacksquare$$

Wektory styczne wyreprezentować można jeszcze inaczej. Niech A i B oznaczają dwie algebry rzeczywiste, przemienne z jedynką. Niech także $\rho: A \to B$ będzie homomorfizmem algebr. Różniczkowaniem algebry A względem homomorfizmu ρ nazywamy liniowe odwzorowanie $D: A \to B$ spełniające warunek

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad D(a_1 a_2) = D(a_1)\rho(a_2) + \rho(a_1) D(a_2)$$

Powyższy warunek nazywa się Regułą Leibniza. Przypomina istotnie R.L. znaną z rachunku różniczkowego jednej zmiennej. Zauważmy, że jeśli 1_A oznacza jedynkę w algebrze A to $D(1_A)=0$ dla dowolnego D:

$$D(1_A) = D(1_A 1_A) = \rho(1_A)D(1_A) + D(1_A)\rho(1_A) = 1_B D(1_A) + D(1_A) 1_B = 2 \cdot D(1_A)$$

$$D(1_A) = 2D(1_A) \Rightarrow D(1_A) = 0$$

Niech teraz $A = C^\infty(M)$, $B = \mathbb{R}$ $\quad \rho: f \longmapsto f(x)$ dla ustalonego $x \in M$. Obserwacja: Każdy wektor styczny $\dot{\gamma}(0)$ definiuje różniczkowanie względem homomorfizmu będącego ewaluacją funkcji w punkcie. Istotnie, odwzorowanie

$$f \longmapsto \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$$ jest liniowe, zależy jedynie od $\dot{\gamma}(0)$ oraz

$$f \cdot g \longmapsto \frac{d}{dt}\left((f \cdot g)\circ \gamma\right)(0) = \frac{d}{dt}\left((f\circ\gamma)(g\circ\gamma)\right)(0) = (f\circ\gamma)(0)\frac{d}{dt}(g\circ\gamma)(0) + \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0)(g\circ\gamma)(0) =$$

$$= f(x)\frac{d}{dt}(g\circ\gamma)(0) + g(x)\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0)$$

STWIERDZENIE: Każde różniczkowanie $C^\infty(M)$ nad $f \longmapsto f(x)$ pochodzi od wektora stycznego.

LEMAT: O funkcjach znikających w punkcie: Niech f będzie gładką funkcją określoną na otoczeniu 0 w $\mathbb{R}^n$. Wtedy $f(x) = x^i g_i(x)$ dla pewnych gładkich funkcji g_i

DOWÓD: Weźmy $x \in \mathbb{R}^n$ w otoczeniu zera, $I \subset \mathbb{R}$ $[0,1] \subset I$

$$F(t) = f(tx) = f(tx^1, tx^2, \dots tx^n)$$

F jest funkcją gładką. $F(0)=0$. Korzystając z podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego

$$F(1)=\int_0^1 F'(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)x^i ds = x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)ds}_{g_i} = x^i g_i$$

g_i są funkcjami gładkimi co wynika z odpowiednich twierdzeń o całkach z parametrem. ■

DOWÓD STWIERDZENIA: Niech D będzie różniczkowaniem $C^\infty(M)$ względem $f \mapsto f(x)$
Korzystając z lematu zapisujemy f w szczególnej postaci

$$f = f(x) + \varphi^i g_i \qquad f - f(x) \text{ znika w } x \text{ więc} \ldots$$

funkcja stała równa $f(x)$

zależy od f a nie od D

$$D(f) = D(f(x) + \varphi^i g_i) = D(f(x)) + D(\varphi^i g_i) = 0 + \overbrace{\varphi^i(x)}^{=0} D(g_i) + D(\varphi^i) g_i(x) = D(\varphi^i) g_i(x)$$

Te liczby zależą od D

W układzie współrzędnych φ D zadane jest liczbami $v^1 \ldots v^n$ gdzie $v^i = D(\varphi^i)$

Weźmy teraz krzywą $\gamma_v(t) = \varphi^{-1}(v^1 t, v^2 t, \ldots, v^n t)$ i policzmy $D_{\gamma_v}(f)$

$$D_{\gamma_v}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_v)(0) = \frac{d}{dt}\Big(f(x) + \varphi^i(\gamma_v(t)) g_i(\gamma_v(t))\Big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_i v^i t\, g_i(\gamma_v(t))\Big)\Big|_{t=0}$$

$= \sum_i v^i g_i(x) = D(f)$ Różniczkowanie D pochodzi więc od γ_v. ■