# PRZYKŁADY STYCZNE i KOSTYCZNE

GR 1 L.3.



1. Przestrzeń afiniczna. Przypomnijmy że przestrzeń afiniczna jest to para $(A, V)$ gdzie $A$ jest zbiorem a $V$ przestrzenią wektorową wraz z operacją $+: A\times V \longrightarrow A$ o własnościach: $(a+v)+w = a+(v+w)$, $a+0=a$ $\forall a,b\in A$ $\exists!\, v\in V: a+v=b$.
Powyższe własności oznaczają, że ustalenie punktu $a_0$ w $A$ zadaje bijekcję $A\longrightarrow V$.
Wybierając bazę w $V$ $(e_1,\dots,e_n)$ możemy zdefiniować globalne współrzędne w $A$:

$$x^i: A\longrightarrow V \qquad x^i(a) = \langle \varepsilon^i, a-a_0\rangle \quad \text{gdzie } (\varepsilon^i) \text{ oznacza bazę dualną do } (e_i)$$

mapa

parametryzacja

Inaczej możemy napisać $a = a_0 + \sum_i x^i e_i$

Przestrzeń afiniczna jest rozmaitością. Atlas może składać się z jednej globalnej mapy.
Jak wygląda przestrzeń styczna do $A$ w punkcie $a$? Rozpatrzmy krzywą $\gamma: I\longrightarrow A$ taką, że $\gamma(0)=a$. Wybierzmy też punkt $a_0\in A$. Krzywej $\gamma$ można wtedy przypisać krzywą $\tilde\gamma: I\longrightarrow V$ taką, że $\gamma(t) = a_0+\tilde\gamma(t)$. Liczymy

$$\frac{d}{dt} f\big(a_0+\tilde\gamma(\cdot)\big)\Big|_{t=0} = \underbrace{f'(a_0+\tilde\gamma(0))}_{\in L(V,\mathbb{R})=V^*}\underbrace{\tilde\gamma'(0)}_{\in V} = f'(a)\tilde\gamma'(0)$$

łatwo zauważyć, że wynik nie zależy od wyboru $a_0$.

Wektor styczny do $A$ w $a$ zadawany przez $\gamma$ zależy jedynie od wektora stycznego do $\gamma$ (w sensie analizy II) $\tilde\gamma'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\tilde\gamma(t)-\tilde\gamma(0)}{t}$ $\quad T_aA = V$ $\quad$ Powyższy rachunek wskazuje także, że $T_a^*A = V^*$

Dodatkowo istnieje kanoniczne odwzorowanie $T_aA\longrightarrow T_bA$ dane przez przesunięcie krzywej: Krzywą $\gamma$ przechodzącą przez $a$ możemy odwzorować w krzywą przechodzącą przez $b$ dodając wektor $b-a$: $\gamma\longmapsto \gamma+(b-a)$. Na poziomie wektorów z $V$ dostajemy identyczność. To się wydaje trywialne i na poziomie przestrzeni afinicznych jest. Natomiast dla ogólnej rozmaitości bez dodatkowej struktury nie możemy przesuwać krzywych od punktu do punktu, zatem nie mamy kanonicznego izomorfizmu $T_xM$ i $T_yM$ dla $x\neq y$. Oczywiście $T_xM$ i $T_yM$ są p.w. tego samego wymiaru ale żaden z izomorfizmów nie jest wyróżniony.

Możliwość przesuwania krzywych a zatem przesuwania wektorów stycznych pozwala „oddzielić" punkt zaczepienia od wektora stycznego i napisać

$$TA = A\times V \qquad T^*A = A\times V^*$$

2. Powierzchnie zanurzone. Niech $M$ będzie $m$-wymiarową powierzchnią zanurzoną w $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ jest w szczególności przestrzenią afiniczną modelowaną na sobie, więc $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Każda krzywa w $M$ jest też krzywą w $\mathbb{R}^n$ zatem $T_xM\subset T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$: przestrzeń styczna do $M$ jest podprzestrzenią wektorową w $\mathbb{R}^n$.
Jeśli $M = F^{-1}(0)$ dla pewnej regularnej funkcji $F$ to $T_xM = \ker F'(x)$.

Przestrzeń kostyczna $T_x^*M$ jest przestrzenią ilorazową $\mathbb{R}^n/(T_xM)^0$ zgodnie z zasadą

> Jeśli $W$ jest podprzestrzenią w $V$ to $W^*$ jest ilorazową $V^*$ przez $W^0$.

Uwaga: $T_xM \subset \mathbb{R}^n$ zależy od punktu. Np. przestrzeń styczna do dwuwymiarowej sfery w punkcie na biegunie jest „pozioma" $\langle e_x, e_y \rangle$ a na równiku w punkcie $(1,0,0)$ „pionowa" $\langle e_y, e_z \rangle$. Nie istnieje wyróżniony sposób utożsamiania wektorów stycznych w różnych punktach — nie da się tego zrobić w sposób globalny w tym sensie że jeśli dla każdej pary punktów $x, y \in S^2$ ustalimy izomorfizm $F_{xy}: T_xS^2 \to T_yS^2$ to nie będzie spełnione $F_{yz} \circ F_{xy} = F_{xz}$ dla wszystkich $x, y, z$.

3. Grupa Liego. Interesujące z punktu widzenia fizyki są rozmaitości, które są jednocześnie grupami o tej dodatkowej własności że odwzorowanie mnożenia i brania odwrotności są gładkie. Grupy takie nazywają się *grupami Liego*. Ważną klasę grup Liego są grupy macierzowe. Rozważmy konkretny przykład:

liniowe

$SL(2,\mathbb{R})$ – grupa odwzorowań liniowych $\mathbb{R}^2$ w siebie, odwracalnych, o wyznaczniku 1. Grupę tę można potraktować jako rozmaitość wymiaru 3 zanurzoną w $\mathbb{R}^4$:

specjalna; rzeczywista

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$$

Geometrycznie rzecz biorąc jest to kwadryka, tzn poziomica formy kwadratowej. Oznaczmy $G = SL(2,\mathbb{R})$ dla skrócenia napisu. W $G$ jest wyróżniony punkt, mianowicie jedynka grupy czyli macierz $\mathbb{1}$. $a=d=1$ $b=c=0$. Rozważmy $\gamma: I \to G$ takie, że $\gamma(0) = \mathbb{1}$

$$\gamma: t \longmapsto \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \begin{aligned} &a(t)d(t) - b(t)c(t) = 1 \\ &a(0) = d(0) = 1 \quad b(0) = c(0) = 0 \end{aligned}$$

Wektor styczny $\begin{bmatrix} a'(0) & b'(0) \\ c'(0) & d'(0) \end{bmatrix}$ musi zatem spełniać

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(a(t)d(t) - b(t)c(t)\big) = a'(0)\underbrace{d(0)}_{1} + \underbrace{a(0)}_{1}d'(0) - b'(0)\underbrace{c(0)}_{0} - \underbrace{b(0)}_{0}c'(0) =$$

$$= a'(0) + d'(0) \leftarrow \text{ślad}$$

Przestrzenią styczną do $G$ w $\mathbb{1}$ jest przestrzeń wektorowa macierzy bezśladowych. Spróbujmy wprowadzić jakieś współrzędne w otoczeniu $\mathbb{1}$ i zapiszmy wektory styczne w bazie.

$(a,b,c,d)$: $ad - bc = 1$ $\quad a = x+y \quad d = x-y \quad b = z+t \quad c = z-t \quad \mathbb{1}: (1,0,0,1)$

$(x,y,z,t)$: $x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1$

sygnatura $(++--)$

$$\begin{bmatrix} x+y & z+t \\ z-t & x-y \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} z &= t = 0 \\ x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Bazą w macierzach $2\times 2$ bezśladowych jest np. $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$. Posługując się wzorem 5.

$\Lambda$ '' $R$ '' $S$

$$\det e^X = e^{trA} \quad (A \text{ jest macierzą})$$

stwierdzamy, że jeśli $X\in T_{\mathbb{1}}G$ to $e^{tX}\in G$ zatem $t\longmapsto e^{tX}$ jest krzywą gładką w $G$. znajdźmy $e^{\lambda\Lambda}$, $e^{rR}$, $e^{sS}$.

$$e^{\lambda\Lambda} = \begin{bmatrix}e^{\lambda}&0\\0&e^{-\lambda}\end{bmatrix} \qquad e^{rR} = \begin{bmatrix}1&r\\0&1\end{bmatrix} \qquad e^{sS} = \begin{bmatrix}1&0\\s&1\end{bmatrix}$$

Proponuję następującą parametryzację otoczenia $\mathbb{1}$:

$$(\lambda,s,r)\longmapsto \begin{bmatrix}e^{\lambda}&0\\0&e^{-\lambda}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\s&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&r\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda}&0\\0&e^{-\lambda}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&r\\s&sr+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda}&re^{\lambda}\\se^{-\lambda}&(sr+1)e^{-\lambda}\end{bmatrix}$$

$a=e^{\lambda}$
$b=re^{\lambda}$
$c=se^{-\lambda}$
$d=(sr+1)e^{-\lambda}$

sprawdzamy rząd:

$$\begin{array}{c} \lambda: \\ r: \\ s: \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} e^{\lambda} & re^{\lambda} & -se^{-\lambda} \\ 0 & e^{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} \end{matrix}} & \begin{matrix} -(sr+1)e^{-\lambda} \\ se^{-\lambda} \\ re^{-\lambda} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

nieznikający minor, rząd 3 - maksymalny

$(\lambda,s,r)$ to dobre współrzędne w otoczeniu $\mathbb{1}$. $\lambda(\mathbb{1})=0$ $r(\mathbb{1})=0$ $s(\mathbb{1})=0$. W tych współrzędnych

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}=\Lambda \qquad \frac{\partial}{\partial r}=R \qquad \frac{\partial}{\partial s}=S$$

W każdej grupie odwzorowanie mnożenia z lewej (z prawej też) jest bijekcją $L_g: G\to G$ $L_g(h)=gh$. W grupie Liego jest dyfeomorfizmem. Mnożąc przez $g$ można otoczenie jedynki przesunąć robiąc z niego otoczenie $g$. Każdą krzywą można przesunąć, zatem każdy wektor styczny można przesunąć. W ten sposób przestrzeń $T_gG$ można utożsamić z $T_{\mathbb{1}}G$. Przykład

$$t\longmapsto \begin{bmatrix}1+t&2t\\-\frac{t}{2}&1-t\end{bmatrix}$$

i znajdźmy wektor styczny w $t=1$ ten w $g=\begin{bmatrix}2&2\\-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}1+t&2t\\-t/2&1-t\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix}1&2\\-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}$$

jakiemu elementowi $T_{\mathbb{1}}G$ ten wektor odpowiada? Cofamy do $\mathbb{1}$ przez $g^{-1}$ $\qquad g^{-1}=\begin{bmatrix}0&-2\\+\frac{1}{2}&2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0&-2\\\frac{1}{2}&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix} = \Lambda+2R-\frac{1}{2}S$$

Utożsamienie $T_gG\simeq T_{\mathbb{1}}G =: \mathfrak{g}$ umożliwia napisanie $TG = G\times\mathfrak{g}$. Jest to niemal kanoniczne. Niemal, bo zamiast lewego przesunięcia można było wziąć prawe. Teraz można się zastanowić dlaczego twierdzę, że $TS^2$ nie da się zapisać jako $S^2\times V$ gdzie $V$ jest dwuwymiarową przestrzenią wektorową a $TG$ można zapisać jako $G\times\mathfrak{g}$ ??? Odpowiedź tkwi w zrozumieniu „da się" a do tego potrzebujemy struktury rozmaitości różniczkowej w $TM$.

# TM i T*M są rozmaitościami

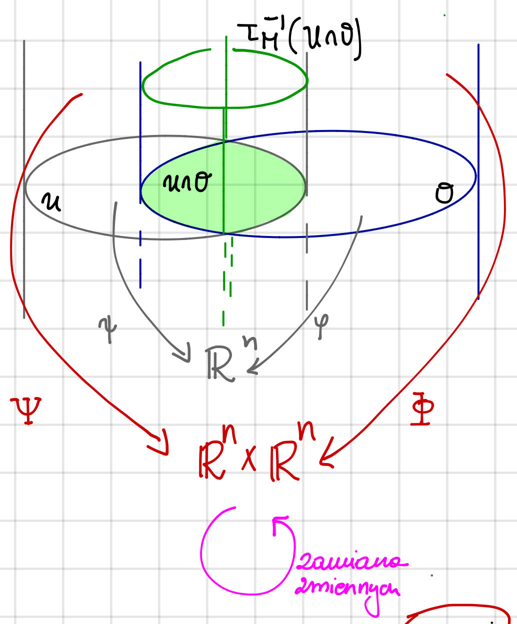


Rozważmy zbiory $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$, $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$. Wprowadzimy w TM i T*M strukturę rozmaitości. Zaczniemy od TM

Oznaczmy $\tau_M$ odwzorowanie przypisujące wektorowi stycznemu jego punkt zaczepienia, tzn $[\gamma]_\sim \longmapsto \gamma(0)$. Niech teraz $\{(\mathcal{O},\varphi)\}$ będzie atlasem na $M$. Zbiory $\tau_M^{-1}(\mathcal{O})$ pokrywają całe TM. Dla każdego $(\mathcal{O},\varphi)$ definiujemy współrzędne w $\tau_M^{-1}(\mathcal{O})$

$$\tau_M^{-1}(\mathcal{O}) \ni v \xmapsto{\Phi} \left(\varphi^1(\tau_M(v)), \dots, \varphi^n(\tau_M(v)); \ v^1,\dots,v^n\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{gdzie} \quad v = v^1\partial_1 + \dots$$
$$\dots + v^n \partial_n$$

W TM wprowadzamy najsłabszą topologię taką, aby wszystkie odwzorowania typu powyższego były ciągłe. Jest to topologia generowana przez przeciwobrazy zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^{2n}$ względem odwzorowań typu $\Phi$. Sprawdźmy teraz jak jest z zamianą zmiennych:




$$\mathbb{R}^n \ni (\varphi^i) \xmapsto{\psi\circ\varphi^{-1}} \psi^j(\varphi^i) \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (\varphi^i, \dot\varphi^i) \longmapsto \left(\psi^j(\varphi^i), \dot\psi^j(\varphi^i, \dot\varphi^j)\right) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$v: \quad \varphi^i(\tau_M(v)) \quad \dot\varphi^i(v)$$

$$v = \dot\varphi^i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^i} = \frac{\partial\psi^j}{\partial\varphi^i}\frac{\partial}{\partial\psi^j} = \frac{\partial\psi^1}{\partial\varphi^i}\frac{\partial}{\partial\psi^1} + \dots + \frac{\partial\psi^n}{\partial\varphi^i}\frac{\partial}{\partial\psi^n}$$

macierz $\quad (\psi\circ\varphi^{-1})' = \Lambda$

$$v = \dot\varphi^i \frac{\partial}{\partial\varphi^i} = \dot\varphi^i \Lambda^j_i \frac{\partial}{\partial\psi^j} = \dot\psi^j \frac{\partial}{\partial\psi^j}$$

$$\dot\psi^j = \Lambda^j_i(\varphi^k)\dot\varphi^i$$

Zmienne kropkowane transformują się liniowo z macierzą której współczynniki są pochodnymi funkcji $(\psi\circ\varphi^{-1})^i$. Zatem jeśli $\psi\circ\varphi^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ to $\Psi\circ\Phi^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. My pracujemy z gładkimi, zatem $\Psi\circ\Phi^{-1}$ jest gładkie.

**STWIERDZENIE** Jeśli $M$ jest rozmaitością gładką to $TM$ też jest rozmaitością gładką.

Jest to oczywiście szczególna rozmaitość: Istnieje $\tau_M: TM \longrightarrow M$ gładka submersja, dla każdego $x$ $\tau^{-1}(x) = T_xM$ jest przestrzenią wektorową. Współrzędne $(\varphi^i, \dot\varphi^j)$ są liniowe w tym sensie że mamy wyróżnione przez układ współrzędnych bazy $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^1} \dots \frac{\partial}{\partial\varphi^n}\right)$ w każdym punkcie i współrzędne kropkowane pochodzą od rozkładu w bazie, zamiany współrzędnych są liniowe. Takie coś nazywa się wiązką wektorową. Na razie nie zajmujemy się ogólnie wiązkami.

To samo robimy dla $T^*M = \bigcup_{x\in M} T^*_x M$. Jeśli $(\theta, \varphi)$ jest mapą w $M$ definiujemy

$$\pi_M^{-1}(\theta) \ni \alpha \longmapsto F(\alpha) = \left(\varphi^i(\pi_M(\alpha)), p_j(\alpha)\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad \alpha = p_j(\alpha)\, d\varphi^j(\pi_M(\alpha)) \quad \left(\text{piszemy } p_j d\varphi^j\right)$$

To samo z topologią, sprawdzamy zamianę zmiennych:

$$\alpha = p_i d\varphi^i = p_i (\Lambda^{-1})^i{}_j d\psi^j = r_j d\psi^j$$

$$\psi^j(\varphi^i) \longrightarrow \quad d\psi^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} d\varphi^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial \varphi^1} d\varphi^1 + \dots + \frac{\partial \psi^i}{\partial \varphi^n} d\varphi^n = \Lambda^i{}_j d\varphi^j$$

$$d\varphi^i = (\Lambda^{-1})^i{}_j d\psi^j$$

$$r_j = p_i (\Lambda^{-1})^i{}_j (\varphi^i)$$

**STWIERDZENIE** Jeśli $M$ jest rozmaitością gładką to $T^*M$ też jest rozmaitością gładką (i wiązką wektorową)

Uwaga: operację „brania $T$ od rozmaitości" (oraz $T^*$) można iterować. Używa się $TTM$, $TT^*M$, $T^*TM$ i $T^*T^*M$, ale to nas czeka pewnie pod koniec semestru lub na GR II

## ODWZOROWANIA STYCZNE, RELACJA KOSTYCZNA

Niech $M, N$ będą rozmaitościami gładkimi a $f: M \longrightarrow N$ odwzorowaniem gładkim. Odwzorowaniem stycznym $Tf$ nazywamy odwzorowanie $Tf: TM \longrightarrow TN$ którego wartością na wektorze stycznym do krzywej $\gamma: I \to M$ jest wektor styczny do krzywej $f\circ\gamma$.
We współrzędnych:

$(\theta, \varphi)$ w $M$ $(\mathcal{U}, \psi)$ w $N$ Wyrazimy $f$ we współrzędnych: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$Tf$ „składa się" z $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ oraz pochodnej $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'$. Typowe oznaczenia są proste:

$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ jest z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ więc składa się z $n$ funkcji $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})^\alpha$ $m$ zmiennych

zamiast tego piszemy $f^\alpha$

$(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'$ to macierz $m$ kolumn $n$ wierszy, której wyrazem macierzowym jest $\dfrac{\partial(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})^\alpha}{\partial\varphi^i}$

zamiast tego piszemy $\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial \varphi^i}$

$Tf$ jest uogólnieniem pojęcia pochodnej funkcji wielu zmiennych na przypadek powierzchni i rozmaitości.

Okazuje się że nie ma czegoś takiego jak „odwzorowanie kostyczne". Przyczyny są następujące: Załóżmy, że $M$ i $N$ nie są tego samego wymiaru. Jeśli $\dim N < \dim M$ to $f$ musi sklejać punkty, tzn nie jest injekcją i nie jest odwracalne. Ustalmy $x\in M$ i $f(x)\in N$

wtedy $F_x = Tf|_{T_xM}$ jest liniowe $F_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$. Istnieje więc odwzorowanie dualne $F_x^* : T^*_{f(x)}N \longrightarrow T^*_xM$. Odwzorowanie $F_x^*$ nie zbierają się jednak do odwzorowania z $T^*N$ do $T^*M$ gdyż jeśli jest więcej punktów $y \in N$ takich że $f(x) = y$ to ewentualne $T^*f$ musiałoby być wielowartościowe:

$T^*f$ - relacja nie odwzorowanie

$$\begin{tikzcd}
T^*M \arrow[d, "\pi_M"'] & T^*N \arrow[l] \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

# POLA WEKTOROWE I FORMY

**Polem wektorowym** na rozmaitości $M$ nazywamy odwzorowanie $X : M \longrightarrow TM$ takie, że $\tau_M \circ X = id_M$, tzn każdemu punktowi przypisany jest jeden wektor styczny zaczepiony w tym właśnie punkcie. **Pole wektorowe jest gładkie** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie między rozmaitościami.

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[d, "\tau_M"'] \\
M \arrow[u, bend right, "X"']
\end{tikzcd}$$

Notacja

$X : M \longrightarrow TM$ $\quad X(x) = X^1(x)\frac{\partial}{\partial \varphi^1} + \dots + X^m(x)\frac{\partial}{\partial \varphi^m}$ Pole we współrzędnych jest dane przez $m$ funkcji. Te funkcje $X^i$ też można wyrazić we współrzędnych. Pole jest gładkie jeśli wszystkie funkcje $X^i \circ \varphi^{-1}$ są gładkie dla wszystkich map.

**Formą różniczkową (jednoformą różniczkową)** na $M$ nazywamy odwzorowanie $\alpha : M \longrightarrow T^*M$ takie że $\pi_M \circ \alpha = id_M$ tzn każdemu punktowi przypisany jest jeden kowektor zaczepiony w tym właśnie punkcie. Forma jest gładka jeśli jest gładka jako odwzorowanie między rozmaitościami. Notacja

$\alpha : M \longrightarrow T^*M$ $\quad \alpha(x) = \alpha_1(x)d\varphi^1 + \dots + \alpha_n(x)d\varphi^n$ Forma we współrzędnych też jest dana przez funkcje na $M$. Jest gładka jeśli $\alpha_i \circ \varphi^{-1}$ są gładkie.

Kowektory można obliczać na wektorach dostając liczby $(p,v) \longmapsto \langle p,v \rangle \in \mathbb{R}$. Formy można „obliczać" na polach dostając funkcje $(\alpha, X) \longmapsto \langle \alpha, X \rangle$

Oznaczenia: $\mathfrak{X}(M)$ - pola wektorowe gładkie na $M$, $\Omega^1(M)$ - jednoformy na $M$

$$\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$