♣

Przykład 14 Przykładem dwuformy na $\mathbb{R}^2$ jest tzw. forma objętości zorientowanej związana z kanonicznym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^2$ (o formach objętości dokładniej powiemy później)

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

Tę samą formę możemy wyrazić we współrzędnych biegunowych biorąc pod uwagę, że

$$\mathsf{d}x = \cos\varphi \mathsf{d}r - r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi, \quad \mathsf{d}y = \sin\varphi \mathsf{d}r + r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi$$

Mnożymy zewnętrznie $\mathsf{d}x$ i $\mathsf{d}y$ wyrażone we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{gathered}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (\cos\varphi \mathsf{d}r - r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r + r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) = \\ (\cos\varphi \mathsf{d}r) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r) + (\cos\varphi \mathsf{d}r) \wedge (r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) + (-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r) + \\ (-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) = \\ \cos\varphi\sin\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}r + r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r - r^2\sin\varphi\cos\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\varphi\end{gathered}$$

Pierwszy i ostatni składnik są równe zero, ponieważ iloczyn zewnętrzny dwóch identycznych kowektorów jest równy zero. Oznacza to, że

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r$$

Korzystając z własności iloczynu zewnętrznego piszemy

$$\mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r = -\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi,$$

zatem ostatecznie

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (r\cos^2\varphi + r\cos^2\varphi)\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi = r\,\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi.$$

♣

6 Różniczka zewnętrzna.

Używaliśmy już specjalnego oznaczenia na zbiór gładkich cięć wiązki stycznej ($\mathcal{X}(M)$). Wygodnie jest także wprowadzić oznaczenie $\Omega^k(M)$ na zbiór gładkich cięć wiązki k-kowektorów: $\wedge^k\pi_M : \wedge^k\mathsf{T}^*M \to M$. Wygodnie jest także uważać, że $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ oraz iloczyn zewnętrzny 0-formy i k-formy to po prostu mnożenie k-formy przez funkcję.

Fakt 7 *Operator liniowy*

$$\mathsf{d} : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

spełniający następujące warunki: (1) d w działaniu na 0-formy jest równy zdefiniowanej wcześniej różniczce funkcji; (2) jeśli $\alpha \in \Omega^k(M)$ i $\beta \in \Omega^l(M)$ to $\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k\alpha \wedge \mathsf{d}\beta$; (3) $\mathsf{d}^2 = 0$, tzn $\mathsf{d}(\mathsf{d}\alpha) = 0$ dla dowolnej formy α, jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód: Załóżmy, że operator d istnieje. Wówczas warunek (2) pozwala go zadać jedynie na 0-formach i 1-formach, ponieważ wszystkie inne wyprodukujemy korzystając z liniowości i reguły Leibniza (czyli właśnie warunku (2)). Na 0-formach wartość d jest określona przez warunek (1). Każda 1-forma jest kombinacją liniową wyrażeń postaci $f\mathsf{d}g$, gdzie f, g są funkcjami gładkimi. Używając więc (2) i (3) dostajemy

$$\mathsf{d}(f\mathsf{d}g) = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g + f\mathsf{d}\mathsf{d}g = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g.$$

$\square$.

Fakt 8 *Operator d istnieje.*

Dowód: W dziedzinie $\mathcal{O}$ lokalnego układu współrzędnych (x^i) działanie d zadamy wzorem „we współrzędnych". Ze względu na liniowość wystarczy wiedzieć jak działa d na formę α postaci $a(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$:

$$\mathsf{d}(a(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}) = \mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^j}\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Pozostaje sprawdzić własności (1)-(3). Warunek (1) jest spełniony automatycznie, warunek (2) sprawdzamy rachunkiem: Weźmy

$$\alpha = a\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}, \qquad \beta = b\mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l},$$

gdzie a i b są funkcjami we współrzędnych (x^i), wtedy

$$\alpha \wedge \beta = ab\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}.$$

Aplikujemy operator d:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}(ab) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
(a\mathsf{d}b + b\mathsf{d}a) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
a\mathsf{d}b \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} + \\
b\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
\left(\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(b\mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right) + \\
(-1)^k \left(a\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(\mathsf{d}b \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right) = \\
\mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathsf{d}\beta
\end{aligned}$$

Pozostaje do sprawdzenia warunek (3). Wystarczy go sprawdzić dla funkcji:

$$\mathsf{d}\mathsf{d}f = \mathsf{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathsf{d}x^i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = 0$$

Ostatnia równość wynika z równości drugich pochodnych cząstkowych mieszanych dla funkcji gładkich. Zachowania za względu na zamianę zmiennych nie musimy sprawdzać, gdyż mamy jednoznaczność $\square$

Zanim zagłębimy się dalej w teorię policzmy dwa przykłady:

Przykład 15 Znaleźć $\mathsf{d}\beta$, jeśli $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(xz\mathsf{d}x + yz\mathsf{d}y - (x^2+y^2)\mathsf{d}z\Big)$$

♣

Przykład 16 Znaleźć $\mathsf{d}\omega$, jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$$\omega = \frac{x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x}{x^2+xy+y^2}$$

♣

Przy okazji powyższych rachunków okazało się, że istnieją niezerowe (i całkiem skomplikowane) formy, których różniczka jest zero. Używać będziemy następujących nazw: jeśli $\mathsf{d}\alpha = 0$, to α nazywa się formą *zamkniętą*, jeśli $\alpha = \mathsf{d}\beta$, to α jest formą *zupełną*. Każda forma zupełna jest zamknięta. Czy jest też odwrotnie? Odpowiedź na to pytanie będzie treścią następnego wykładu.

Oprócz wzoru „na współrzędnych" oraz niekonstruktywnej definicji poprzez własności, mamy także wzór na różniczkę formy wyrażoną poprzez jej wartości na układzie pól wektorowych. Wzór ten pokazuje związek różniczkowania form z nawiasem Liego pól wektorowych:

Fakt 9 (Wzór Cartana) *Jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$ oraz $\omega \in \Omega^k(M)$, to*

$$\begin{aligned}\mathsf{d}\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-1}X^i\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1}) + \\ + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1})\end{aligned}$$

Dowód: Sprawdźmy przede wszystkim, czy powyższy wzór na $\mathsf{d}\omega$ określa rzeczywiście $k+$1-formę. Na oko widać, że wyrażenie po prawej stronie jest liniowe ze względu na każdy z argumentów, antysymetrię też dość łatwo sprawdzić. Trzeba jeszcze jednak zwrócić uwagę na to, czy wartość prawej strony zależy jedynie od wartości pól w punkcie a nie na przykład także od pochodnych tych pól. Na pierwszy rzut oka pochodne mogą być zaangażowane, gdyż we wzorze występuje nawias pól a także działanie pola na funkcję skonstruowaną z formy i pozostałych pól. Sprawdzić to można na przykład badając jak zachowuje się prawa stona, kiedy jedno z pól pomnożymy przez funkcję. Ze względu na antysymetrię wystarczy pomnożyć pierwsze pole. Jeśli rzeczywiście wzór określa $(k+1)$-formę, to powinniśmy otrzymać wzór

$$\mathsf{d}\omega(fX_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = f\mathsf{d}\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}), \tag{14}$$

czyli żadnego różniczkowania funkcji!!! Sprawdzamy: Gdy w pierwszej sumie weźmiemy $i=1$, otrzymamy

$$fX_1\omega(X_2, \ldots, X_{k+1}),$$