WŁASNOŚCI RÓŻNICZKI ZEWNĘTRZNEJ

(1) Różniczkę zewnętrzną zdefiniowaliśmy podając jej własności oraz wzór we współrzędnych. Poczucie estetyki matematycznej wymaga jednak podania wzoru, który nie wymagałby ustalenia układu współrzędnych. Żeby go zapisać potrzebujemy dodatkowego pojęcia dotyczącego pól wektorowych.

Jedna z możliwych definicji wektora stycznego mówi że jest to różniczkowanie algebry $C^\infty(M)$ o wartościach w $\mathbb{R}$ nad homomorfizmem będącym ewaluacją funkcji w punkcie. W tym języku pole wektorowe jest to różniczkowanie algebry $C^\infty(M)$ o wartościach w $C^\infty(M)$ nad identycznością:

$$X \in \mathfrak{X}(M) \quad X: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \quad X(fg) = fX(g) + gX(f)$$

STWIERDZENIE: Istnieje jednoznaczna odpowiedniość między różniczkowaniami $C^\infty(M)$ nad identycznością a gładkimi polami wektorowymi, tzn każde pole zadaje różniczkowanie i każde różniczkowanie pochodzi od pola.

DOWÓD: Samodzielnie w oparciu o odpowiedni fakt opisujący sytuację w punkcie.

DEFINICJA: Niech D_1, D_2 będą różniczkowaniami algebry $\mathcal{A}$ nad identycznością. Komutatorem D_1 i D_2 nazywamy odwzorowanie

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

STWIERDZENIE: Komutator różniczkowań jest różniczkowaniem

DOWÓD:

$$[D_1, D_2](ab) = D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) = D_1(aD_2(b) + D_2(a)b) - D_2(aD_1(b) +$$

$$D_1(a)b) = D_1(a)D_2(b) + aD_1(D_2(b)) + D_1(D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) - D_2(a)D_1(b) +$$

$$- aD_2(D_1(b)) - D_2(D_1(a))b - D_1(a)D_2(b) =$$

$$= a[D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b))] + [D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))]b =$$

$$= a[D_1, D_2](b) + [D_1, D_2](a)b \quad \blacksquare$$

DEFINICJA: Komutatorem lub nawiasem Liego pól wektorowych X, Y nazywamy pole $[X,Y]$ odpowiadające komutatorowi różniczkowań X i Y.

We współrzędnych $X = X^i\partial_i \quad Y = Y^j\partial_j \quad [X,Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\partial_j$ sprawdzamy rachunkiem obliczając $[X,Y](f)$.

TWIERDZENIE (WZÓR CARTANA) Jeśli $X_1,\dots,X_{k+1}\in\mathfrak{X}(M)$, $\omega\in\Omega^k(M)$ to

$$d\omega(X_1,\dots,X_{k+1})=\sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{l-1}X_l\cdot\omega(X_1,\dots\overset{\check{l}}{},\dots,X_{k+1})+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1\dots\overset{\check{i}}{}\;\overset{\check{j}}{}\dots X_{k+1})$$

PRZYKŁAD

$\omega\in\Omega^1(M)$

$$d\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])$$

Weźmy $\omega=fdg$ $\quad d\omega(X,Y)=X(fdg)(Y)-Y(fdg)(X)-fdg([X,Y])=X(f\cdot D_Y(g))-Y(fD_X(g))+$

$$-f[D_X,D_Y](g)=D_X(f)D_Y(g)+fD_X(\cancel{D_Y(g)})-D_Y(f)D_X(g)-fD_Y(\cancel{D_X(g)})-fD_X(\cancel{D_Y(g)})+fD_Y(\cancel{D_X(g)})$$
$$=D_X(f)D_Y(g)+D_Y(f)D_X(g)=\langle df,X\rangle\langle dg,Y\rangle-\langle df,Y\rangle\langle dg,X\rangle=df\wedge dg(X,Y)$$

DOWÓD: Trzeba sprawdzić, czy wzór Cartana zadaje rzeczywiście $(k+1)$ formę, tzn czy wartość nie zależy przypadkiem od pochodnych pól. Sprawdzimy to licząc $d\omega(fX_1,X_2,\dots,X_{k+1})$. Wynik powinien być $fd\omega(X_1\dots X_{k+1})$, bez zależności od pochodnych f.

$$d\omega(fX_1,\dots,X_{k+1})=fX_1\omega(X_2,\dots,X_{k+1})+\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{j+1}X_j(f\omega(X_1\dots\overset{\check{j}}{}\dots,X_{k+1}))+\sum_{l=2}^{k+1}\omega([fX_1,X_l],X_2,\dots\overset{\check{l}}{}\dots,X_{k+1})(-1)^{l+1}+$$
$$\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}f\omega([X_i,X_j],X_1,\dots\overset{\check{i}}{}\;\overset{\check{j}}{}\dots,X_{k+1})=$$
$$=f\Big\{X_1\omega(X_2,\dots,X_{k+1})+\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j]X_2,\dots\overset{\check{i}}{}\;\overset{\check{j}}{}\dots,X_{k+1})+\sum_{j=2}^{k+1}X_j\omega(X_1,\dots\overset{\check{j}}{}\dots,X_{k+1})+\sum_{l=2}^{k+1}\omega([X_1,X_l],X_2,\dots\overset{\check{l}}{}\dots)\Big\}$$

$$[fX,Y]=f[X,Y]-Y(f)X$$

$$+\sum_{j=2}^{k+1}\cancel{X_j(f)\omega(X_1,\dots\overset{\check{j}}{}\dots X_{k+1})(-1)^{j+1}}+\sum_{l=2}^{k+1}\cancel{(-1)^{l+1}(-X_l(f))\omega(X_1,X_2,\dots\overset{\check{l}}{}\dots)}=fd\omega(X_1\dots X_{k+1})$$

Odwzorowanie dane wzorem Cartana jest liniowe i zależy jedynie od wartości pól w punkcie. Dalej można albo sprawdzić czy $dd=0$ i jak działa na iloczyn zewnętrzny a następnie skorzystać z jednoznaczności d. To jest dość pracochłonne. Łatwiej jest skorzystać z wyrażenia na współrzędnych. Jest łatwo, bo pola współrzędnościowe komutują, więc druga suma jest zero:

$$\omega=fdx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\qquad d\omega(\partial_{j_1},\dots,\partial_{j_{k+1}})=\sum_{l=1}^{k+1}\partial_{j_l}(fdx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})(\partial_{j_1},\dots\overset{\check{l}}{}\dots\partial_{j_{k+1}})(-1)^{l+1}$$
$$\sum_{l=1}^{k+1}\frac{\partial f}{\partial x^{j_l}}(-1)^{l+1}\,\delta^{i_1}_{j_1}\,\delta^{i_2}_{j_2}\dots\delta^{i_{l-1}}_{j_{l-1}}\,\delta^{i_l}_{j_{l+1}}\dots\delta^{i_k}_{j_{k+1}}$$

$\sum_m\frac{\partial f}{\partial x^m}dx^m\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}(\partial_{j_1}\dots\partial_{j_k})$ w tej sumie różna od zera jest conajwyżej jedna składowa: taka, że zbiór $\{i_1,\dots,i_k,m\}$ i $\{j_1\dots j_{k+1}\}$ jest jednakowy. Wtedy $m=j_l$ dla pewnego l i ponadto $i_1=j_1$ … $i_{l-1}=j_{l-1}$ $i_l=j_{l+1}$ … $i_k=j_{k+1}$. Dodatkowo

$$dx^{j_l}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{l-1}}\wedge dx^{j_{l+1}}\wedge\dots dx^{j_k}=(-1)^{l+1}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{l-1}}\wedge dx^{j_l}\wedge dx^{j_{l+1}}\wedge\dots\wedge dx^{j_{k+1}}$$

Wyrazy zaznaczone na różowo są więc równe. ■

Zróbmy teraz dodatkowy rachunek: niech $\eta \in \Omega^1(M)$. Sprawdźmy korzystając ze wzoru Cartana, że $dd\eta = 0$:

$$d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])$$

$$dd\eta(X,Y,Z) = Xd\eta(Y,Z) - Yd\eta(X,Z) + Zd\eta(X,Y) - d\eta([X,Y],Z) + d\eta([X,Z],Y) - d\eta([Y,Z],X)$$

$$= X[Y\eta(Z) - Z\eta(Y) - \eta([Y,Z])] - Y[X\eta(Z) - Z\eta(X) - \eta([X,Z])] + Z[X\eta(Y) - Y\eta(X) +$$
$$- \eta([X,Y])] - [X,Y]\eta(Z) + Z\eta([X,Y]) + \eta([[X,Y],Z]) +$$
$$+ [X,Z]\eta(Y) - Y\eta([X,Z]) - \eta([[X,Z],Y]) +$$
$$- [Y,Z]\eta(X) + X\eta([Y,Z]) + \eta([[Y,Z],X]) =$$

kolorowe się upraszczają

$$= X(Y\eta(Z)) - X(Z(\eta(Y))) - Y(X(\eta(Z))) + Y(Z(\eta(X))) + Z(X(\eta(Z))) - Z(Y(\eta(X))) +$$
$$- [X,Y]\eta(Z) + [X,Z]\eta(Y) - [Y,Z]\eta(X) + \eta([[X,Y],Z]) - \eta([[X,Z],Y]) + \eta([[Y,Z],X])$$
$$= \eta\Big(\underbrace{[[X,Y],Z] - [[X,Z],Y] + [[Y,Z],X]}\Big)$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że to co „pod η" jest zero dla dowolnych pól wektorowych. Jest to fakt natury algebraicznej, wynikający z tego, że X,Y,Z są różniczkowaniami. Tożsamość

$$[[X,Y],Z] - [[X,Z],Y] + [[Y,Z],X] = 0$$ nazywa się Tożsamością Jacobiego

Zapamiętywanie gdzie jest + a gdzie − w tożsamości Jacobiego i w jakiej kolejności są nawiasy może być trudne. Można jednak to „oswoić" w następujący sposób: Przestrzeń wektorowa $\mathfrak{X}(M)$ pól na M wyposażona w nawias $[\,,\,]$ jest algebrą: działanie $(X,Y) \longmapsto [X,Y]$ jest liniowe, antysymetryczne. (Nie jest łączne, nie ma jedynki, więc to jest inna algebra niż te, które napotykaliśmy. Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ $\mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]$. Wtedy tożsamość J. oznacza, że $\mathcal{L}_X$ jest różniczkowaniem algebry $\mathfrak{X}(M)$ nad identycznością.
Istotnie: Warunek różniczkowania

$$\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$$ przepisany w terminach nawiasów ma postać

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

Rzeczy zielone są w istocie tym samym jeśli uwzględni się antysymetrię.

Algebra z działaniem antysymetrycznym spełniającym tożsamość J. nazywa się algebrą Liego. Wszelkie algebry macierzowe (np $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, które już się pojawiały w zadaniach, czy $\mathfrak{so}(3)$ tzn antysymetryczne macierze bezśladowe to są właśnie algebry Liego z komutatorem w roli nawiasu). $so(3)$ to z resztą to samo co $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym w roli działania).

(2) Cofnięcie formy a różniczka. Dyskutowaliśmy już cofnięcie jednoformy. Z definicji, dla $\varphi: M \to N$ gładkiego i $\alpha \in \Omega^1(N)$ mamy

$$\varphi^*\alpha(v) = \alpha(T\varphi(v)) \text{ dla } v \in TM.$$ Jeśli $\alpha = df$ liczymy:

$\varphi^* df(v) = df(T\varphi(v))$. Jeśli γ jest krzywą taką, że $\dot\gamma(0) = v$ to

$df(T\varphi(v)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\varphi\circ\gamma = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f\circ\varphi)\circ\gamma = d(f\circ\varphi)(v)$ Pisząc dla funkcji (czyli 0-form) $\varphi^* f = f\circ\varphi$ otrzymujemy $\varphi^* df = d(\varphi^* f)$

Dla k-formy $\omega \in \Omega^k(N)$ definiujemy

$$\varphi^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(T\varphi(v_1), \dots, T\varphi(v_k))$$

STWIERDZENIE: Dla dowolnej formy $\omega \in \Omega^k(N)$ i $\varphi: M \to N$ zachodzi

$$\varphi^* d\omega = d(\varphi^*\omega)$$

DOWÓD:

Zauważmy po pierwsze, że $\varphi^*(\alpha\wedge\beta) = (\varphi^*\alpha)\wedge(\varphi^*\beta)$ – jest to prosta konsekwencja definicji cofnięcia. Lokalnie każda k-forma jest postaci $\omega = f dg_1\wedge\dots\wedge dg_k$

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(f dg_1\wedge\dots\wedge dg_k) = (f\circ\varphi)\, \varphi^* dg_1\wedge\dots\wedge\varphi^* dg_k$$

$$d(\varphi^*\omega) = d(f\circ\varphi)\wedge\varphi^* dg_1\wedge\dots\wedge\varphi^* dg_k = \varphi^* df\wedge\varphi^* dg_1\wedge\dots\wedge\varphi^* dg_k =$$

$$= \varphi^*(df\wedge dg_1\wedge\dots\wedge dg_k) = \varphi^* d\omega \quad \blacksquare$$

7 Formy zamknięte i zupełne

Policzmy różniczkę następującej formy różniczkowej określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\alpha = \frac{y\mathsf{d}x - x\mathsf{d}y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{d}\alpha = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x - \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x = \frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x = 0\end{aligned}$$

Okazuje się więc, że forma ewidentnie niezerowa, mająca współczynniki wyrażające się dość skomplikowanymi wzorami i nie będące stałymi funkcjami ma różniczkę równą zero. Już wiemy, że tak powinno być jeśli forma α jest zupełna, to znaczy jeśli $\alpha = \mathsf{d}f$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$. Spróbujmy znaleźć taką funkcję. Dla form określonych na całym $\mathbb{R}^2$ i mających znikającą różniczkę procedura znajdowania odpowiedniej funkcji jest względnie prosta: Niech $\beta = f(x,y)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y$ będzie gładką formą na $\mathbb{R}^2$ taką, że $\mathsf{d}\beta = 0$. Co to oznacza dla współczynników f i g:

$$\mathsf{d}\beta = \frac{\partial f}{\partial y}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial g}{\partial x}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}\beta = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

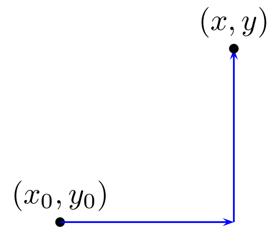
Niech teraz (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem $\mathbb{R}^2$. Funkcja

$$h(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t$$

jest gładką funkcją na $\mathbb{R}^2$, ponadto

$$\begin{aligned}\mathsf{d}h(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}y = \\ \left(f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \\ \left(f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \\ (f(x,y_0) + f(x,y) - f(x,y_0)\mathsf{d}t)\,\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \beta\end{aligned}$$

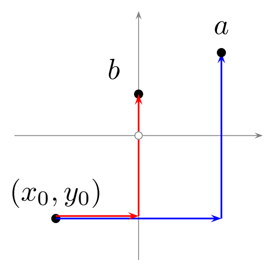
W powyższym rachunku skorzystaliśmy z równości pochodnych cząstkowych funkcji f i g. O powyższej procedurze można myśleć jak o całkowaniu formy β po łamanej składającej się z odcinków od (x_0, y_0) do (x, y_0) i dalej od (x, y_0) do (x, y) jak na rysunku 12. Na kolejnych wykładach mówić będziemy o całkowaniu form i wtedy okaże się, że jest to dokładnie to. Na razie jednak powyższe całki można całkować jako całki z parametrem. Wynik całkowania jest



Rys. 12: Metoda całkowania

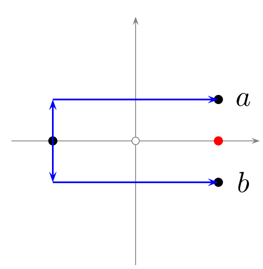
funkcją punktu końcowego. Ponieważ przepis dotarcia do punktu końcowego jest jednoznacznie określony dostajemy dobrze określoną funkcję. Własności całek zapewniają gładkość tej funkcji. Funkcję h nazwiemy *funkcją pierwotną* formy β. Ze względu na dowolność wyboru (x_0, y_0) funkcji pierwotnych jest wiele. Dwie funkcje pierwotne tej samej formy β różnią się o funkcję, której różniczka jest równa 0, czyli o funkcję stałą.

Spróbujmy tak samo znaleźć funkcję pierwotną formy α. Napotkamy tutaj na następujący problem: Do punktu b nie możemy dojść „według przepisu” ponieważ musielibyśmy przejść



Rys. 13: Kłopoty w $(0, 0)$

przez punkt w którym forma nie jest określona (rysunek 13) . Nie da się więc policzyć jednej z całek występujących we wzorze. Można spróbować obejść ten problem definiując bardziej skomplikowane przepisy dochodzenia do każdego z punktów. Jeśli np. $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ możemy ustanowić następującą zasadę: do punktów w górnej półpłaszczyźnie dochodzimy idąc najpierw w górę potem poziomo, a w dolnej najpierw w dół, potem poziomo (rysunek 14). Co jednak



Rys. 14: Omijamy $(0, 0)$?

zrobić z punktami na dodatniej półosi poziomej? Okazuje się, że nie da się wymyśleć takiego przepisu, żeby funkcja pierwotna określona była także w punktach półosi poziomej dodatniej i jednocześnie była ciągła. Jeśli na przykład $a = (1, \epsilon)$ a $b = (1, -\epsilon)$, to zgodnie opisanym powyżej przepisem

$$h(a) = \arctan(\epsilon) + 2\arctan(1/\epsilon), \qquad h(b) = -\arctan(\epsilon) - 2\arctan(1/\epsilon).$$