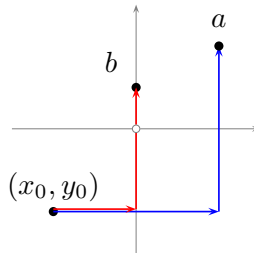


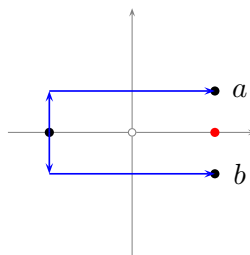
Rys. 12: Metoda całkowania

funkcją punktu końcowego. Ponieważ przepis dotarcia do punktu końcowego jest jednoznacznie określony dostajemy dobrze określoną funkcję. Własności całek zapewniają gładkość tej funkcji. Funkcję h nazwiemy *funkcją pierwotną* formy β . Ze względu na dowolność wyboru (x_0, y_0) funkcji pierwotnych jest wiele. Dwie funkcje pierwotne tej samej formy β różnią się o funkcję, której różniczka jest równa 0, czyli o funkcję stałą.

Spróbujmy tak samo znaleźć funkcję pierwotną formy α . Napotkamy tutaj na następujący problem: Do punktu b nie możemy dojść „według przepisu” ponieważ musielibyśmy przejść

Rys. 13: Kłopoty w $(0, 0)$

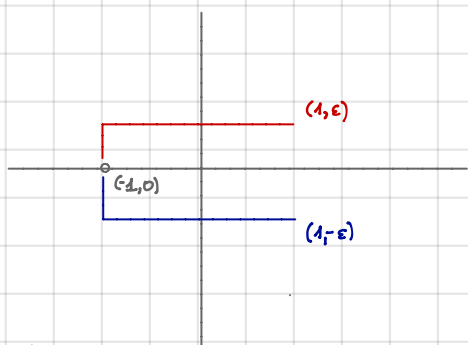
przez punkt w którym forma nie jest określona (rysunek 13). Nie da się więc policzyć jednej z całek występujących we wzorze. Można spróbować obejść ten problem definiując bardziej skomplikowane przepisy dochodzenia do każdego z punktów. Jeśli np. $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ możemy ustanowić następującą zasadę: do punktów w górnej półpłaszczyźnie dochodzimy idąc najpierw w górę potem poziomo, a w dolnej najpierw w dół, potem poziomo (rysunek 14). Co jednak

Rys. 14: Omijamy $(0, 0)$?

zrobić z punktami na dodatniej półosi poziomej? Okazuje się, że nie da się wymyślić takiego przepisu, żeby funkcja pierwotna określona była także w punktach półosi poziomej dodatniej i jednocześnie była ciągła. Jeśli na przykład $a = (1, \epsilon)$ a $b = (1, -\epsilon)$, to zgodnie opisanym powyżej przepisem (*rachunki na następnej stronie*)

$$h(a) = \arctan(\epsilon) + 2 \arctan(1/\epsilon), \quad h(b) = -\arctan(\epsilon) - 2 \arctan(1/\epsilon).$$

$$\alpha = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$



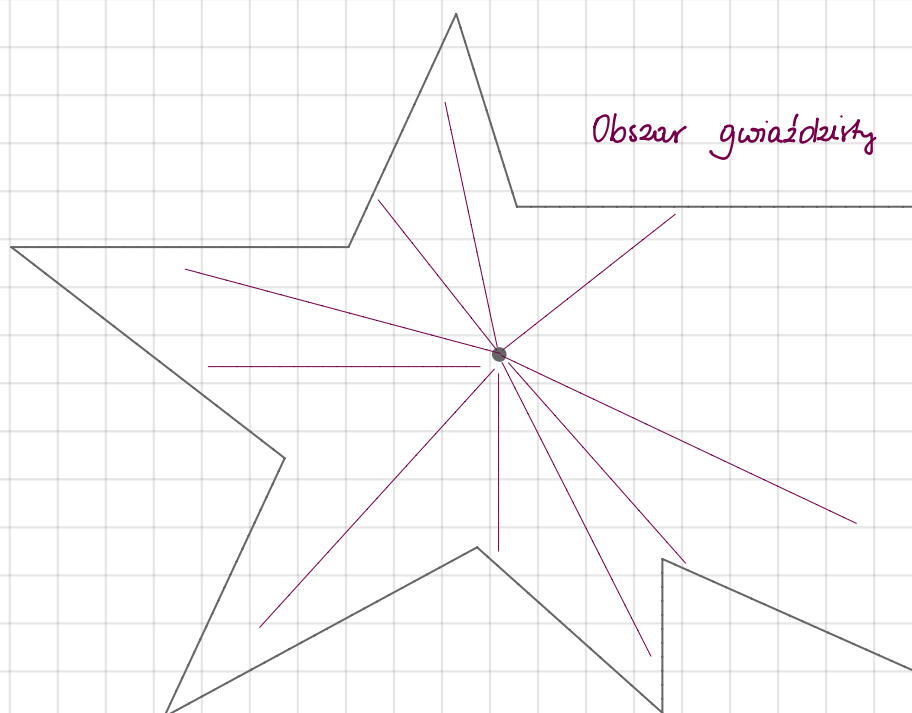
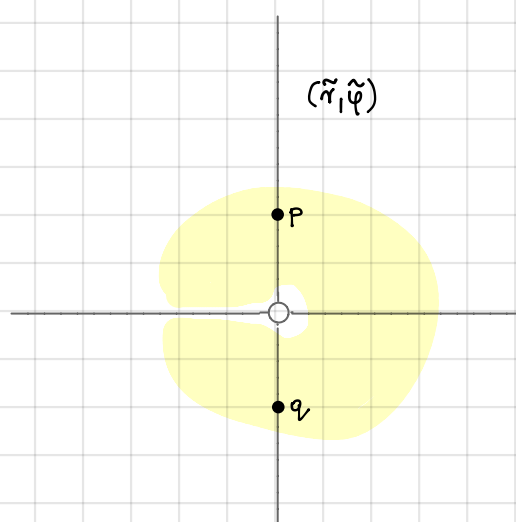
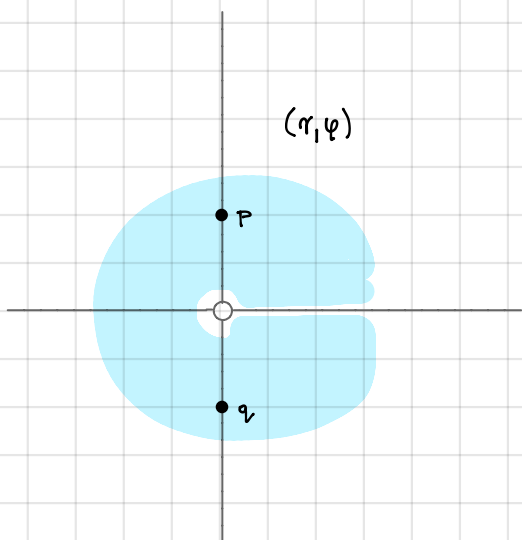
$$-\int_0^{-\epsilon} \frac{(-1)}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t \Big|_0^{-\epsilon} = -\operatorname{arctg} \epsilon$$

$$\int_{-1}^1 \frac{-\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} dt = -\frac{1}{\epsilon^2} \int_{-1}^1 \frac{\epsilon}{1 + (t/\epsilon)^2} dt = -\frac{1}{\epsilon} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\epsilon} \right) \Big|_{-1}^1 \cdot \epsilon =$$

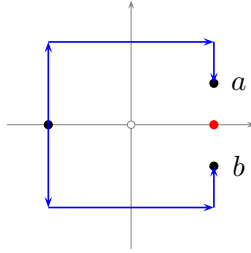
$$= -\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\epsilon} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\epsilon} \right) \right] = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\epsilon}$$

$$-\int_0^{\epsilon} \frac{(-1)}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\epsilon} = \operatorname{arctg} \epsilon$$

$$-\int_{-1}^1 \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} dt = \dots = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\epsilon}$$



Gdy ϵ dąży do zera granica „od góry” jest π a od dołu $-\pi$. Może jednak tak jest źle, bo zmniejszanie epsilon oznacza, że trzeba w granicy przejść przez niedozwolony punkt. Co zmieni się, jeśli droga będzie wyglądała jak na rysunku 15? Droga od góry to



Rys. 15: A może lepiej tak...

$$h(a) = \arctan(1) + \arctan(1) - \arctan(-1) - \arctan(\epsilon) + \arctan(1) = \pi - \arctan(\epsilon)$$

a droga od dołu

$$h(b) = -\arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(-1) + \arctan(\epsilon) - \arctan(1) = -\pi + \arctan(\epsilon)$$

Gdy zmniejszamy epsilon droga od góry daje w granicy wartość π , a od dołu $-\pi$. Konstruując funkcję pierwotną do β napotykamy wciąż na trudności. Uzasadnijmy ostatecznie, że zrobić się tego nie da. Najłatwiej będzie użyć dwóch układów współrzędnych typu biegunowego. Proste rachunki pokazują, że w układzie współrzędnych (r, φ) takim, że $r > 0$ i $\varphi \in]0, \infty[$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ określonym na obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \geq 0\}$ otrzymujemy $\beta = -d\varphi$. Jedną z możliwych funkcji pierwotnych (w tym obszarze) to $h_0(r, \varphi) = -\varphi$. Podobny układ współrzędnych możemy zadać tymi samymi wzorami zastępując r przez \tilde{r} i φ przez $\tilde{\varphi}$ w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \leq 0\}$ dla $\tilde{\varphi} \in]-\pi, \pi[$. Znowu $\beta = -d\tilde{\varphi}$ i jedna z możliwych funkcji pierwotnych ma postać $h_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = -\tilde{\varphi}$. Załóżmy teraz, że istnieje funkcja pierwotna f określona na całej dziedzinie formy β . Funkcja ta może różnić się od h_0 i h_1 w obszarze ich określoności co najwyżej o stałą. Niech więc $f = h_0 + \varphi_0$ i $f = h_1 + \varphi_1$. Porównajmy wartości funkcji w punktach $p = (0, 1)$ i $q = (0, -1)$.

$$h_0(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_0(q) = \frac{3\pi}{2}, \quad h_1(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_1(q) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(p) = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \varphi_1,$$

$$f(q) = \frac{3\pi}{2} + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi + \varphi_0 = \varphi_1$$

Porównanie wartości funkcji f w punktach q i p prowadzi do sprzeczności. Funkcja f pierwotna do β na całej dziedzinie tej formy nie istnieje! Powyższy przykład pokazuje też, że problem leży nie tyle w formie, co w obszarze na którym ta forma jest określona.

Definicja 22 Mówimy, że rozmaitość M jest *ściągalna do punktu* $x_0 \in M$ jeśli istnieje gładkie odwzorowanie

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

takie, że

$$\forall x \in M \quad H(x, 1) = x, \quad \forall x \in M \quad H(x, 0) = x_0.$$

Płaszczyzna \mathbb{R}^2 jest ściągalna do zera: $H(x, y, t) = (tx, ty)$ (i do każdego innego punktu), zaś $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nie jest ściągalna do żadnego punktu. Związek istnienia formy pierwotnej z kształtem obszaru wypowiedziany jest w poniższym twierdzeniu nazywanym *Lematem Poincaré*:

Twierdzenie 3 *Każda forma zamknięta na rozmaitości ściągalnej jest zupełna.*

Dowód: Dowód przeprowadzimy w dwóch wersjach: we współrzędnych na obszarze w \mathbb{R}^n oraz bez użycia współrzędnych na powierzchni. Wersja we współrzędnych ma tę zaletę, że daje się bezpośrednio zastosować do rachunków zmierzających do znalezienia formy pierwotnej. Niech więc \mathcal{O} będzie obszarem gwiaździstym w \mathbb{R}^n względem zera. Obszar nazywany gwiaździstym względem punktu x_0 jeśli wraz z punktem x zawiera także cały odcinek łączący x_0 z x . Na obszarze gwiaździstym względem zera możemy używać odwzorowania ściąającego

$$F : [0, 1] \times \mathcal{O} \ni (t, x) \longmapsto (t \cdot x) \in \mathcal{O}.$$

Dla form na $[0, 1] \times \mathcal{O}$ zdefiniujemy także odwzorowanie liniowe

$$K : \Omega^{k+1}([0, 1] \times \mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^k(\mathcal{O})$$

wzorami

$$K(\alpha(t, x) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \left(\int_0^1 \alpha(t, x) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad K(\alpha(t, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}) = 0$$

Pokażemy teraz, że dla dowolnej k -formy α na \mathcal{O} zachodzi wzór

$$dK(F^*\alpha) + K(dF^*\alpha) = \alpha. \quad (15)$$

Wzór ten gwarantuje, że jeśli $d\alpha = 0$ (wtedy także $dF^*\alpha = 0$) to $\alpha = d(K(F^*\alpha))$, czyli forma zamknięta ma formę pierwotną. Wzoru (15) dowodzimy bezpośrednim rachunkiem. Ze względu na liniowość wszystkich używanych odwzorowań możemy przeprowadzić rachunek dla formy postaci $\alpha = \alpha(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

$$F^*(\alpha) = \alpha(tx) t^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{m=1}^k t^{k-1} x^{i_m} (-1)^{m-1} \alpha(tx) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee i_m}{\dots} \wedge dx^{i_k}$$

$$K(F^*(\alpha)) = \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \overset{\vee i_m}{\dots} \wedge dx^{i_k}$$

$$dK(F^*(\alpha)) = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \delta_j^{i_m} \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee i_m}{\dots} \wedge dx^{i_k} +$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee i_m}{\dots} \wedge dx^{i_k} =$$

$$k \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee i_m}{\dots} \wedge dx^{i_k}$$

(16)

$$d\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

$$\begin{aligned} dF^*\alpha = F^*d\alpha = t^{k+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + t^k \sum_{j=1}^n x^j \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \\ \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^m t^k x^{i_m} \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(F^*d\alpha) = \sum_{j=1}^n x^j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \\ \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^m x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (17) \end{aligned}$$

Dodajemy wyniki z (16) i (17), czerwone wyrazy się upraszczają i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} dK(F^*\alpha) + K(dF^*\alpha) = \\ k \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^n x^j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\ \left(\int_0^1 \left[kt^{k-1} \alpha(tx) + \sum_{j=1}^n x^j t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} \right] dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\ \alpha(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (18) \end{aligned}$$

Dowód w wersji z użyciem współrzędnych został zakończony. Zanim przejdziemy do dowodu bez współrzędnych potrzebujemy kilku ogólnych obserwacji. Weźmy odcinek I otwarty, zawierający $[0, 1]$, rozmaitość M i rodzinę odwzorowań

$$i_t : M \rightarrow M \times I, \quad i_t(x) = (x, t).$$

Niech ω będzie jednoformą na $M \times I$. Wiadomo, że $\mathbb{T}(M \times I) = \mathbb{T}M \times \mathbb{T}I$ oraz $\mathbb{T}^*(M \times I) = \mathbb{T}^*M \times \mathbb{T}^*I$. Jednoformę ω można więc zapisać jako sumę

$$\omega = \tilde{\omega} + f dt,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to odwzorowanie $M \times I \rightarrow \mathbb{T}^*M$ zachowujące projekcję na M a f to funkcja na $M \times I$. Odnotujmy także, że

$$i_t^* \omega = \tilde{\omega}(t, \cdot).$$

Uzasadnimy teraz, że jeśli $d\omega = 0$ to $i_1^* \omega - i_0^* \omega$ jest zupełna. Różniczkę $d\omega$ wyrazić można za pomocą różniczkowania w kierunku M i kierunku I oddzielnie. $d\omega = d_M \omega + d_I \omega = d_M \tilde{\omega} + d_I \tilde{\omega} + d_M f \wedge dt$. Różniczka $d_M \tilde{\omega}$ nie zawiera czynnika dt . Różniczkę $d_I \tilde{\omega}$ interpretować można następująco. Skoro $\tilde{\omega}$ jest odwzorowaniem z $M \times I$ w $s\mathbb{T}^*M$ zachowującym rzut na M , to dla ustalonego $x \in M$ odwzorowanie $t \mapsto \tilde{\omega}(x, t)$ jest krzywą

w przestrzeni wektorowej T_x^*M . Wektor styczny do tej krzywej dla każdej wartości parametru może być interpretowany jako element tej samej przestrzeni wektorowej. Oznaczmy ten wektor przez $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}$. Różniczka

$$d_I \tilde{\omega} = dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Znikanie $d\omega$ oznacza, że

$$0 = d\omega = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + d_M f \wedge dt = d_M \tilde{\omega} + \left(d_M f - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \right) \wedge dt$$

Pierwszy składnik nie zawiera dt , więc znikanie różniczki oznacza znikanie każdego ze składników oddzielnie. W szczególności

$$d_M f = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Z definicji całki z funkcji o wartościach wektorowych mamy, że

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = \tilde{\omega}(x, 1) - \tilde{\omega}(x, 0) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} dt = \int_0^1 (d_M f)(x, t) dt = d \left(\int_0^1 f(\cdot, t) dt \right) (x)$$

Oznaczając

$$g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$$

mamy

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = dg(x).$$

Identyczny rachunek przeprowadzić można dla k -formy ω .

$$\omega = \tilde{\omega} + dt \wedge \eta,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to rodzina k -form na M parametryzowana t a η to podobna rodzina $(k-1)$ -form.

$$d\omega = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - dt \wedge d_M \eta = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - d_M \eta \right).$$

$$d\omega = 0 \quad \text{oznacza} \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = d_M \eta.$$

Niech teraz $I : \Omega^k(M \times I) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ dane będzie wzorem

$$I(\omega)(x) = \int_0^1 \eta(x, t) dt.$$

W szczególności

$$I(d\omega) = \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - d_M \eta \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - \int_0^1 (d_M \eta) dt = \tilde{\omega}(1, \cdot) - \tilde{\omega}(0, \cdot) - d \left(\int_0^1 \eta dt \right).$$

$$I(d\omega) + d(I(\omega)) = i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x)$$

Oczywiście gdy $d\omega = 0$ to

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = d(I(\omega)).$$

Przejdźmy teraz do właściwego dowodu lematu. Niech M będzie rozmaitością ściągającą do punktu x_0 i niech H będzie odpowiednim odwzorowaniem ściągnięcia

$$H : M \times I \rightarrow M.$$

Weźmy także zamkniętą formę α . Oczywiście skoro $d\alpha = 0$ to także $dH^*\alpha = 0$. Zgodnie więc powyższymi rachunkami

$$i_1^*H^*\alpha - i_0^*H^*\alpha = d(I(H^*\alpha)).$$

Pierwszy ze składników to

$$i_1^*H^*\alpha = (H \circ i_1)^*\omega = \omega,$$

bo H złożone z i_1 jest identycznością. W drugim składniku złożenie $(H \circ i_0)$ jest odwzorowaniem stałym: $(H \circ i_0)(x) = x_0$. Cofnięcie formy odwzorowaniem stałym jest zerowe, zatem

$$i_0^*H^*\alpha = (H \circ i_0)^*\omega = 0.$$

Ostatecznie

$$\omega = d(I(H^*\alpha)).$$

□

8 Całkowanie form różniczkowych

8.1 Orientacja

Mówimy, że dwie bazy e i f w skończonej-wymiarowej przestrzeni wektorowej V mają jednakową orientację jeśli macierz przejścia $[id]_e^f$ ma dodatni wyznacznik. Relacja *jednakowej orientacji* jest, jak łatwo sprawdzić, relacją równoważności w zbiorze baz. Dzieli ona zbiór baz na dwie klasy równoważności, które nazywamy *orientacjami*. Mówimy, że przestrzeń wektorowa jest *zorientowana* jeśli ma wyróżnioną orientację. Ze względu na własności wyznacznika orientacja bazy e zmienia się na przeciwną jeśli zmienimy znak przy jednym z wektorów bazowych lub zamienimy miejscami dwa wektory bazowe. Niektóre przestrzenie wektorowe mają kanoniczną orientację. W przestrzeni \mathbb{R}^n kanoniczna jest orientacja, której reprezentantem jest kanoniczna baza.

Przestrzeń styczna do rozmaitości w punkcie jest skończonej-wymiarową przestrzenią wektorową, więc ma dwie możliwe orientacje. Będziemy mówili, że rozmaitość M jest zorientowana, jeśli przestrzenie styczne we wszystkich punktach mają wybrane orientacje w sposób uzgodniony. Oznacza to, że w dziedzinie każdej mapy (\mathcal{O}, φ) orientacje we wszystkich punktach są zgodne lub we wszystkich punktach przeciwnie niż orientacja zadana przez bazę $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Zauważmy, że jeśli rozmaitość jest zorientowana to można na niej wybrać atlas zgodny z orientacją. Istotnie, niech $(\mathcal{O}_i, \phi_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym atlasem na M . Konstruujemy nowy atlas $(\mathcal{U}_i, \psi_i)_{i \in I}$ w następujący sposób: Jeśli mapa (\mathcal{O}_i, ϕ_i) jest zgodna z orientacją pozostawiamy ją bez zmian kładąc $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$, $\psi_i = \phi_i$. Jeśli baza pochodząca od mapy (\mathcal{O}_i, ϕ_i) ma orientację przeciwną kładziemy $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$ oraz jeśli $\phi_i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ kładziemy $\psi_i = (-x^1, x^2, \dots, x^n)$. Orientację na rozmaitości można też zadać wskazując atlas, w którym wyznaczniki wszystkich macierzy przejścia między pochodzącymi od współrzędnych bazami przestrzeni stycznych są dodatnie.

