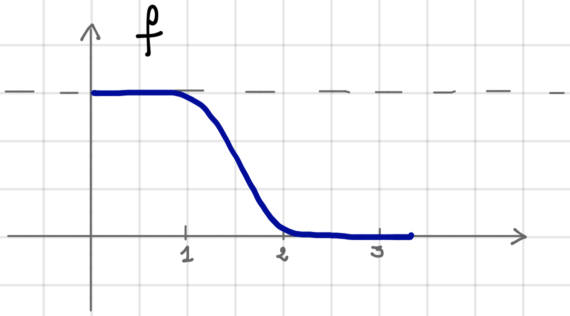
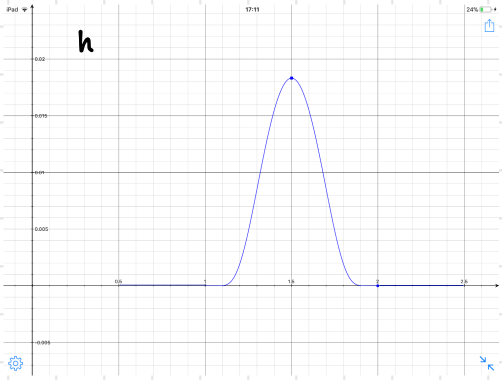
GŁADKI ROZKŁAD JEDNOŚCI

Ingrediencje: **(1)** $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(t) = \exp\left(\frac{1}{(t-1)(t-2)}\right)$ dla $t \in]1,2[$, $h(t)=0$ w pozostałych przypadkach. h jest gładka, niezerowa, o zwartym nośniku

(2) $f: [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{\int_x^2 h(t)\,dt}{\int_1^2 h(t)\,dt}$

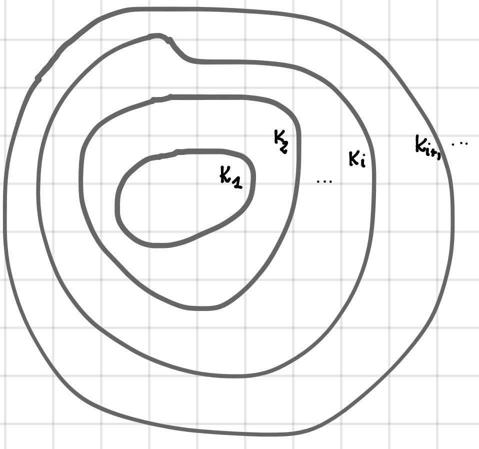




f jest gładka, ma wartość 1 dla $x \in [0,1]$, 0 dla $x \in [2, +\infty[$.

(3) M jest spójną parazwartą rozmaitością wymiaru n, przeliczalną w nieskończoności. Istnieje zatem ciąg $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wstępujący zbiorów zwartych takich, że $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i = M$, $K_i \subset \operatorname{Int} K_{i+1}$

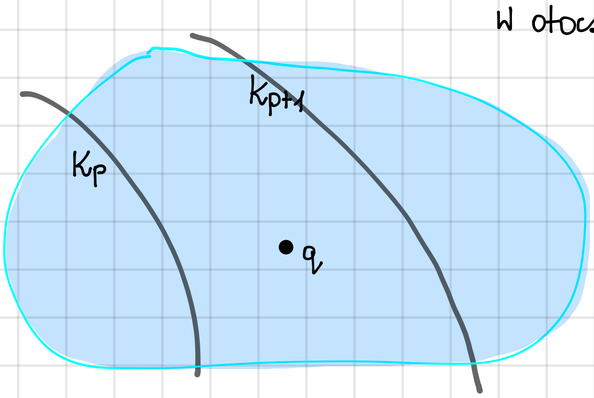
(4)



(5) $(\mathcal{O}_a)_{a\in A}$ jest pokryciem otwartym rozmaitości M.

(6) B_1, B_3 otwarte kule w $\mathbb{R}^n$ o promieniach 1 i 3 odpowiednio

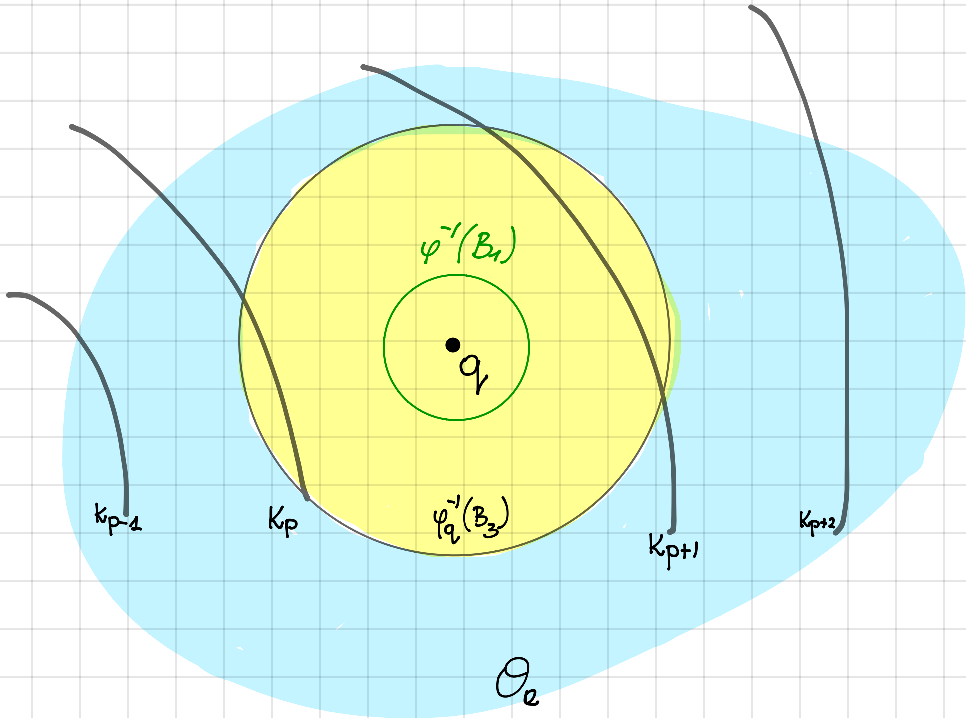
I. W pierwszym kroku konstruujemy lokalnie skończone pokrycie otwarte $(\mathcal{U}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ drobniejsze niż $(\mathcal{O}_a)_{a\in A}$. Ustalmy punkt $q \in M$. Istnieje p: $q \in K_{p+1} \setminus K_p$. Weźmy też a: $q \in \mathcal{O}_a$.



W otoczeniu V_q punktu q wprowadzamy współrzędne φ_q w taki sposób, że $\varphi_q(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$

$\varphi_q^{-1}(B_3) \subset \mathcal{O}_i$

$\varphi_q^{-1}(B_3) \subset K_{p+2} \setminus K_{p-1}$

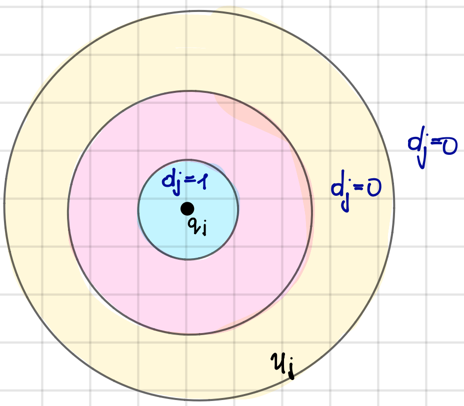


Kolekcja (V_q, φ_q) jest atlasem na M. Atlasem jest także $(\varphi_q^{-1}(B_1), \varphi_q)$. Z pokrycia $(\varphi_q^{-1}(B_1))_{q\in M}$ wybierzemy pokrycie lokalnie skończone. Pokrycie $(\varphi_q^{-1}(B_1))_{q\in M}$ jest oczywiście pokryciem zbioru K_1. Wybieramy z niego podpokrycie skończone. Stanowią je zbiory $\varphi_q^{-1}(B_1)$ dla skończonego zbioru punktów $q\in M$. Numerujemy te punkty $q_1, \dots, q_{j_1}$. Zbiór $K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1$ także jest zwarty - wybieramy podpokrycie skończone, numerujemy punkty $q_{j_1+1}, \dots, q_{j_2}$. Postępujemy tak dalej tworząc ostatecznie przeliczalny zbiór punktów $q_1, \dots, q_{j_1}, \dots$ i odpowiadające mu przeliczalne pokrycie M zbiorami $(\varphi_{q_j}^{-1}(B_1))_{j\in\mathbb{N}}$. Oczywiście $U_j = \varphi_{q_j}^{-1}(B_3)$ także stanowi przeliczalne pokrycie M. W każdym zbiorze U_j mamy też współrzędne φ_{q_j}. Łatwo się przekonać, że $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jest pokryciem lokalnie skończonym: Punkt $x\in K_{r+1}\setminus K_r$. x może należeć jedynie do zbiorów U_j z indeksami $j_{r-1} \leq j \leq j_{r+2}$.

W U_j zdefiniowane są współrzędne φ_{q_j}. Używając tych współrzędnych definiujemy funkcję d_j

dla $x\in U_j$ $\quad d_j(x) = f(|\varphi_{q_j}(x)|)$, dla $x\notin U_j$ $\quad d_j(x)=0$

$$\alpha_j(x) = \frac{d_j(x)}{\sum_{k=1}^{\infty} d_k(x)}$$



W każdym punkcie niezerowa jest skończona liczba elementów sumy.

$(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jest szukanym rozkładem jedności

Do czego możemy użyć gładkiego rozkładu jedności? Na przykład do definiowania formy objętości.

TWIERDZENIE Na rozmaitości orientowalnej wymiaru n istnieje gładka nieznikająca n-forma. Odwrotnie – jeśli taka forma istnieje to rozmaitość jest orientowalna

DOWÓD: Weźmy lokalnie skończony atlas na M i związany z nim gładki rozkład jedności. Nośnik każdej funkcji $(\alpha_i)_{i\in I}$ zawarty jest w dziedzinie mapy. Formę ω definiujemy wzorem

$$\omega(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i(x)\, dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n$$

$(x_i^1 \dots x_i^n)$ są to współrzędne w otoczeniu $\operatorname{supp}\alpha_i$. Rozmaitość jest orientowalna zatem możemy wybrać wyjściowy atlas tak, żeby wszystkie jacobiany były dodatnie. Forma ω ma żądaną własność. Istotnie,

Atlas jest lokalnie skończony więc istnieje skończona liczba indeksów $i_1 \dots i_m$ takich, że ustalony $x \in \mathcal{O}_{i_j}$. W pewnym otoczeniu W punktu x określone są układy współrzędnych $(x_{i_j}^1 \dots x_{i_j}^n)$ i formę można zapisać

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j}(x)\, dx_{i_j}^1 \wedge \dots \wedge dx_{i_j}^n$$

Wszystkie składniki sumy zapiszmy w jednym układzie współrzędnych, np $(x_{i_1}^1 \dots x_{i_1}^n)$

$$\omega(x) = \left\{\alpha_{i_1}(x) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_{i_j}(x)\, \det\left[[\varphi_{i_j} \circ \varphi_{i_1}^{-1}]'(x)\right]\right\} dx_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge dx_{i_1}^n$$

Wszystkie składniki sumy są dodatnie, część niezerowe, więc cała suma jest dodatnia. Zero być nie może bo przynajmniej jedno α_{i_j} jest niezerowe w punkcie x.

Wykażemy teraz, że istnienie nieznikającej n-formy pociąga za sobą orientowalność rozmaitości. Weźmy na M atlas o spójnych dziedzinach i zapiszmy ω we współrzędnych $\omega(x) = f(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

Funkcja f w każdej mapie ma ustalony znak. Jeśli jest to znak dodatni to mapę pozostawiamy bez zmian. Jeśli ujemny modyfikujemy mapę np zamieniając kolejność dwóch współrzędnych. W ten sposób w każdej mapie mamy formę zapisaną za pomocą funkcji stale dodatniej. Na przecięciu dwóch map mamy

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = g\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = g(y(x)) \det(y \circ x^{-1})'\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$=$$

Skoro f i g są dodatnie, to jakobian zamiany zmiennych też musi być dodatni. ■

Nieznikające n-formy nazywamy często formami objętości. Podanie formy objętości jest jednym ze sposobów zdefiniowania orientacji na rozmaitości.

Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

14 grudnia 2013

1 Całkowanie form różniczkowych

1.1 Twierdzenie Stokes'a

W dalszym ciągu E oznaczać będzie półprzestrzeń w $\mathbb{R}^n$, tzn. zbiór

$$E = \{(x^1, x^2, \dots x^n) \in \mathbb{R}^n : \quad x^1 \leqslant 0\}$$

z topologią indukowaną z $\mathbb{R}^n$ (zbiory otwarte w E to przecięcia zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$ z E). Hiprepłaszczyznę $\{x^1 = 0\}$ oznaczać będziemy Π. Zauważmy, że jeśli $\mathcal{O}$ i $\mathcal{U}$ są otwarte w E oraz $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{U}$ jest homeomorfizmem, to obcięcie $\varphi_{|\mathcal{O}\cap\Pi}$ jest homeomorfizmem $\mathcal{O}\cap\Pi$ i $\mathcal{U}\cap\Pi$. Zbiór E służy jako „standardowa" rozmaitość z brzegiem, podobnie jak $\mathbb{R}^n$ jest „standardową" rozmaitością (bez brzegu). Każdy kawałek rozmaitości z brzegiem powinien wyglądać jak kawałek E. Może to być kawałek brzegowy, albo kawałek z wnętrza. Do zdefiniowania struktury gładkiej rozmaitości z brzegiem potrzebujemy jeszcze pojęcia gładkości odwzorowań obszarów, których przecięcie z Π jest niepuste. Odwzorowanie $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{U}$ jest gładkie jeśli da się rozszerzyć do gładkiego odwzorowania $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{U}}$ takiego, że $\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte i $\mathcal{O} = E\cap\hat{\mathcal{O}}, \mathcal{U} = E\cap\hat{\mathcal{U}}$. W takim przypadku $\varphi_{|\mathcal{O}\cap\Pi}$ też jest gładkie.

Definicja 1 Przestrzeń topologiczna M jest *gładką rozmaitością z brzegiem* jeśli dla każdego $q \in M$ istnieją zbiory otwarte $q \in \mathcal{O} \subset M$, $\mathcal{U} \subset E$ i homeomorfizm $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{U}$. Jeśli ponadto $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}' \neq \emptyset$, to odwzorowanie $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ jest gładkie.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}\cap\mathcal{O}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"] & \mathcal{O} \arrow[dl, "\varphi'\circ\varphi^{-1}"] \\
\mathcal{O}' &
\end{tikzcd}$$

W rozmaitości z brzegiem wyróżniamy punkty wewnętrzne, tzn. takie, które mają otoczenia homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ i pozostałe, które nazywamy *brzegowymi*. Zbiór punktów brzegowych oznaczamy ∂M i nazywamy *brzegiem rozmaitości*. Zauważmy, że brzeg rozmaitości z brzegiem sam jest gładką rozmaitością (bez brzegu, tzn brzeg brzegu jest pusty). Istotnie, jeśli $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ jest atlasem na M, to $(\mathcal{U}_i \cap \partial M, \varphi_{i|\mathcal{U}_i\cap\partial M})_{i\in I}$ jest atlasem na brzegu.

Fakt 1 *Niech M będzie orientowalną rozmaitością z brzegiem. Wtedy ∂M też jest orientowalna. Jeśli M jest zorientowana, to na ∂M istnieje wyróżniona orientacja.*