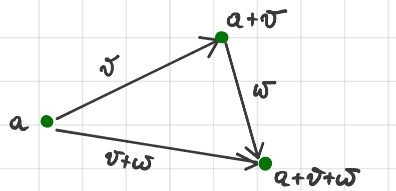
PRZYKŁAD: Niech E będzie dwuwymiarową afiniczną przestrzenią Euklidesową. Przestrzeń afiniczna to jest przestrzeń wektorowa w której zapomniano zero. Oznacza to, że od punktu do punktu można przemieszczać się przy pomocy wektorów z ustalonej przestrzeni wektorowej, ale żaden punkt przestrzeni afinicznej nie jest wyróżniony. Przymiotnik euklidesowa oznacza że ta przestrzeń wektorowa o której mowa powyżej jest rzeczywista i wyposażona w rzeczywisty iloczyn skalarny. To oznacza w szczególności, że można mierzyć odległości między punktami. To co opisane powyżej to oczywiście intuicje, dla porządku dodajmy formalną definicję:

DEFINICJA: Przestrzenią **afiniczną** nazywamy trójkę (A, V, α) w której A jest zbiorem, V - przestrzenią wektorową a $+$ odwzorowaniem $\alpha: A \times V \to A$ spełniającym warunki

(1) $(a+v)+w = a+(v+w)$ dla dowolnych $a \in A$, $v, w \in V$
(2) $a+0 = a$
(3) dla każdej pary $(a,b) \in A \times A$ istnieje dokładnie jedno $v \in V$ takie, że $b = a+v$



Wymiarem przestrzeni afinicznej nazywamy wymiar odpowiedniej przestrzeni wektorowej. Mówimy, że przestrzeń afiniczna jest **euklidesowa** jeśli V jest przestrzenią rzeczywistą z iloczynem skalarnym.

Prostą w przestrzeni afinicznej nazywamy jednowymiarową podprzestrzeń afiniczną, czyli podzbiór postaci

$\ell = \{a + v : v \in \mathcal{U}\}$ gdzie a jest ustalone a $\mathcal{U}$ jest jednowymiarową przestrzenią wektorową

Rozważamy M - zbiór wszystkich prostych w E. Będziemy chcieli sparametryzować jakoś zbiór prostych przy pomocy par liczb rzeczywistych w ten sposób, żeby podanie pary „współrzędnych" jednoznacznie identyfikowało prostą. W tym celu wybieramy punkt $O \in E$ i ortonormalną bazę (e_1, e_2) przestrzeni V. Każdy punkt $a \in A$ możemy teraz opisać jako $a = O + xe_1 + ye_2$. W ten sposób zdefiniowaliśmy dwie funkcje $x: E \to \mathbb{R}$ i $y: E \to \mathbb{R}$, które stanowią współrzędne w A, tzn jednoznacznie identyfikują punkty w A. Większość prostych w E możemy teraz zdefiniować tradycyjnie podając równanie $y = ax + b$. Podając dwie liczby (a,b) możemy opisać wszystkie proste poza równoległymi do prostej $Y = \{O + ye_2, y \in \mathbb{R}\}$. Niech więc $\mathcal{O}$ oznacza zbiór wszystkich prostych w E poza równoległymi do Y. Zamieniając miejscami osie możemy prostej przypisać liczby (A,B) tak aby punkty na prostej spełniały $x = Ay + B$. To działa dla wszystkich prostych z wyjątkiem równoległych do $X = \{O + xe_1, x \in \mathbb{R}\}$. Zbiór wszystkich prostych poza równoległymi do X oznaczymy $\mathcal{U}$.

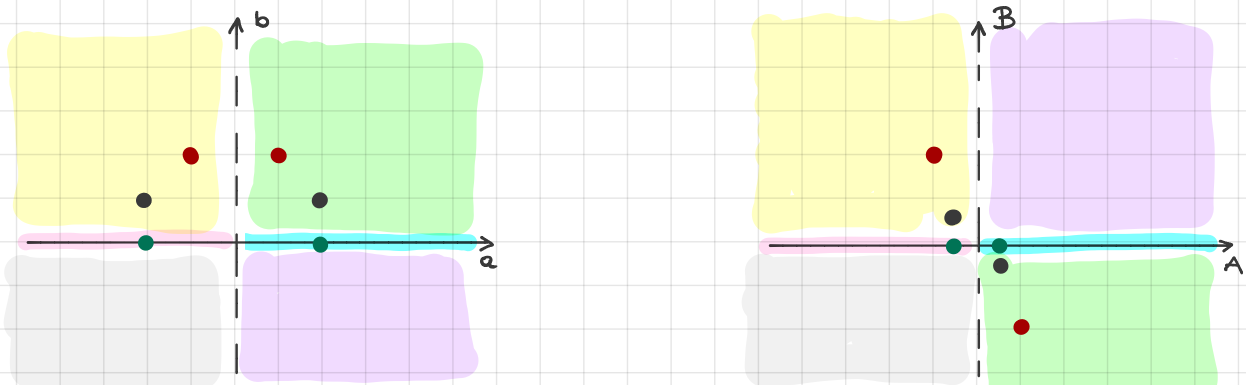
W ten sposób mamy ustalone $\Theta, \mathcal{U}$ takie, że $\Theta \cup \mathcal{U}$ jest zbiorem wszystkich prostych w E. Ponadto zdefiniowane są funkcje:

$$a: \Theta \to \mathbb{R}, \quad b: \Theta \to \mathbb{R}, \quad A: \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \quad B: \mathcal{U} \to \mathbb{R}.$$

Dowolną prostą możemy więc zidentyfikować wybierając $\mathcal{U}$ lub Θ w miarę możliwości oraz podając dwie liczby: (a, b) dla Θ lub (A, B) dla $\mathcal{U}$. Jeśli prosta należy do przecięcia $\Theta \cap \mathcal{U}$ to oba zestawy są dobre i można przeliczyć (a, b) na (A, B)

$$y = ax + b \qquad y - b = ax \qquad x = \frac{y-b}{a} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a} \qquad A = \frac{1}{a} \qquad B = -\frac{b}{a}$$

wzory obowiązują gdy $a \neq 0$. Oczywiście wtedy także $A \neq 0$



$(2,1) \longmapsto (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$(1,2) \longmapsto (1, -2)$

$(2,0) \longmapsto (\frac{1}{2}, 0)$

$(-2,1) \longmapsto (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$(-1,2) \longmapsto (-1, 2)$

$(-2,0) \longmapsto (-\frac{1}{2}, 0)$

Odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\} \ni (a,b) \xmapsto{\Phi} (A(a,b), B(a,b)) \in \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem ciągłym i odwracalnym; odwrotność też jest ciągła. Odwzorowanie to jest więc homeomorfizmem.

Łatwo stwierdzić, patrząc na wzory, że odwzorowanie to jest też różniczkowalne. Policzmy pochodne:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = -\frac{1}{a^2} \qquad \frac{\partial A}{\partial b} = 0 \qquad \frac{\partial B}{\partial a} = \frac{b}{a^2} \qquad \frac{\partial B}{\partial b} = -\frac{1}{a}$$

$$\Phi'(a,b) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 \\ \frac{b}{a^2} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \qquad \det \Phi'(a,b) = 1/a^3$$

Zauważmy, że $\det \Phi'(a,b)$ jest dodatni dla $a>0$ i ujemny dla $a<0$. Ma to ważne konsekwencje o których później. Na razie, patrząc na rachunki możemy stwierdzić, że Φ jest dyfeomorfizmem. Sprawdziliśmy jednokrotną różniczkowalność, ale na podstawie wzorów łatwo zauważyć, że tak naprawdę Φ jest gładkim dyfeomorfizmem.

Zbiór prostych w E nie ma naturalnej topologii. Możemy jednak, używając odwzorowań $M \ni \ell \overset{q}{\longmapsto} (a(\ell), b(\ell)) \in \mathbb{R}^2$ i $M \ni \ell \overset{Q}{\longmapsto} (A(\ell), B(\ell)) \in \mathbb{R}^2$ możemy wprowadzić topologię. Zbiory otwarte w M będą to przeciwobrazy zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^2$ przy pomocy q i Q oraz wszystkiego co można z nich wygenerować biorąc sumy i skończone przecięcia jak zwykle. W ten sposób mamy następującą strukturę:

Zbiór M z topologią, dwa zbiory otwarte $\mathcal{U}, \mathcal{O} \subset M$ takie, że $\mathcal{U} \cup \mathcal{O} = M$, dwa homeomorfizmy $q: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $Q: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ takie, że Φ jest homeomorfizmem. Oczywiście stosujemy obcięcie do $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ żeby odwzorowania dawało się złożyć.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \cap \mathcal{U} \arrow[r, bend left, "q"] \arrow[r, bend right, "Q"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad Q \circ q^{-1} = \Phi$$

Taka struktura nazywa się **rozmaitością**. Jeśli dodatkowo zauważymy, że Φ jest gładkim dyfeomorfizmem, to M stanie się **rozmaitością gładką**. Wprowadzimy teraz niezbędne definicje bardziej formalnie, a następnie sprawdzimy czy nasze M nie jest przypadkiem podobne do czegoś bardzo dobrze znanego.

DEFINICJA: Rozmaitością M wymiaru n nazywamy topologiczną przestrzeń Hausdorffa taką, że każdy punkt $x \in M$ ma otoczenie otwarte $\mathcal{O}$ homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

Definicja ta wyraża intuicję, że rozmaitość to jest zbiór, który lokalnie wygląda jak kawałek $\mathbb{R}^n$. Elementami definicji są zbiór M razem z topologią oraz kolekcja otoczeń $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}$ wraz z odwzorowaniami $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \mathbb{R}^n$ mającymi własność:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \arrow[d, bend left, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \\ \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "\varphi_\beta"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

złożenie jest homeomorfizmem.

Pojedyncze odwzorowanie $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \mathbb{R}^n$ nazywamy **mapą** a całą kolekcję odwzorowań taką że $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha = M$ nazywamy **atlasem**.

Odwzorowanie $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \mathbb{R}^n$ ma wartości w $\mathbb{R}^n$, wobec tego składa się z zestawu n funkcji:

$\varphi_\alpha^1 : \mathcal{O}_\alpha \to \mathbb{R}, \ \ldots, \ \varphi_\alpha^n : \mathcal{O}_\alpha \to \mathbb{R}$. Funkcje te nazywamy **współrzędnymi** a odwzorowanie $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ nazywamy **odwzorowaniem zamiany współrzędnych**.

Jeśli wszystkie odwzorowania zamiany współrzędnych są klasy C^k to mówimy, że rozmaitość jest **klasy C^k**. Ta liczba „k" może być również ∞ – **to rozmaitość gładka** lub ω – **rozmaitość analityczna**.

Czasami warto rozważać bardzo duży atlas zawierający wszystkie możliwe mapy zgodne, tzn takie, że zamiany współrzędnych są homeomorfizmami/dyfeomorfizmami stosownej klasy. Taki atlas nazywa się **zupełny**.

W dalszym ciągu zajmować się będziemy rozmaitościami gładkimi.

Przyda nam się także definicja odwzorowania gładkiego

DEFINICJA: Niech M i N będą odwzorowaniami, niech $F: M \longrightarrow N$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że F jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli dla każdej pary map $(\mathcal{O}, \varphi)$ w M i $(\mathcal{U}, \psi)$ w N takich, że złożenie

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$$

ma sens jest ono gładkim odwzorowaniem zbiorów otwartych $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$. Odwzorowanie gładkie, odwracalne i takie, że odwrotność też jest gładka nazywamy **gładkim dyfeomorfizmem**. Dla dyfeomorfizmu bez przymiotnika wymaga się jednokrotnej różniczkowalności w sposób ciągły dla odwzorowania i odwrotności.

Zanim obejrzymy przykład odwzorowania gładkiego rozważmy dwa kolejne przykłady rozmaitości gładkich:

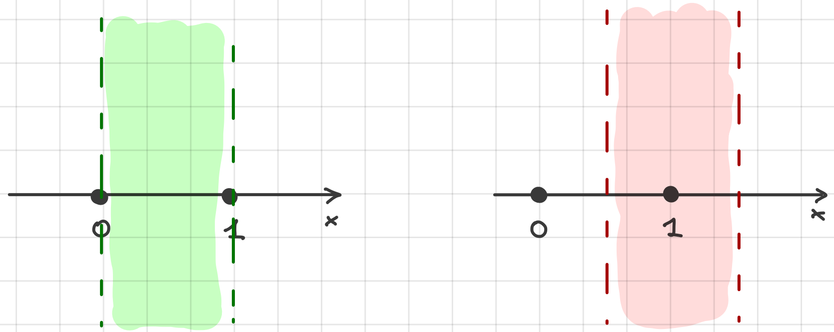
PRZYKŁAD: W $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy dwie relacje równoważności:

$$(x,y) \sim_1 (x',y') \iff y=y' \text{ i } x-x' \in \mathbb{Z}$$

$$(x,y) \sim_2 (x',y') \iff x-x'=k \in \mathbb{Z} \text{ i } y'=(-1)^k y$$

Rozważamy dwa zbiory: $\mathbb{R}^2/_{\sim_1} = P$, $\mathbb{R}^2/_{\sim_2} = Q$. W przypadku obydwu relacji każda klasa równoważności ma reprezentanta w pasku $[0,1[\times \mathbb{R}$. W przypadku P proste $\{(0,y)\}$ i $\{(1,y)\}$ utożsamiamy sklejając punkty z tym samym y. łatwo więc w P rozpoznać walec. W przypadku Q także sklejamy proste $\{(0,y)\}$ i $\{(1,y)\}$ ale utożsamiając punkty $(0,y)$ i $(1,-y)$. Q jest więc wstęgą Möbiusa. W obu zbiorach można wprowadzić strukturę rozmaitości. Tym razem topologię mamy: jest to topologia ilorazowa, tzn. otwarte w P i w Q są takie zbiory, których przeciwobrazy względem $\pi_1: \mathbb{R}^2 \to P$ $(x,y) \mapsto [(x,y)]_1$ lub, odpowiednio, $\pi_2: \mathbb{R}^2 \to Q$, $(x,y) \longmapsto [(x,y)]_2$ są otwarte w $\mathbb{R}^2$. Potrzebujemy zatem jeszcze atlasów. W obu przypadkach wystarczą dwie mapy do opisania struktury rozmaitości.

P:



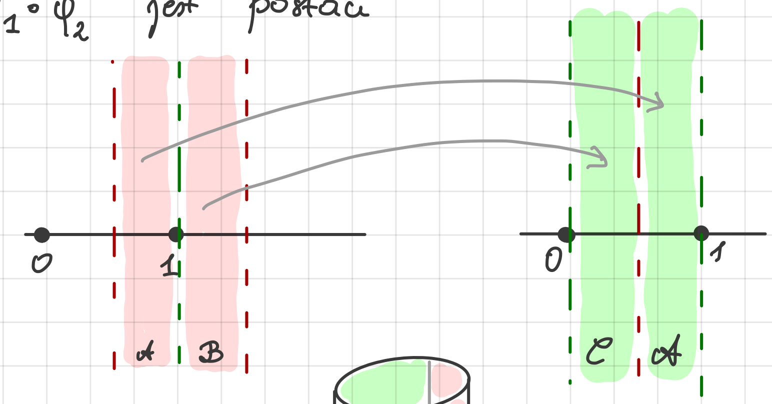
$\mathcal{O}_1 = \pi_1(\,]0,1[\times \mathbb{R})$ $\qquad$ $\mathcal{U}_1 = \pi_1(\,]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[\times \mathbb{R})$

$\varphi_1: \mathcal{O}_1 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\varphi_2: \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^2$

$[(x,y)]_1 \longmapsto (x,y)$ $\qquad$ $[(x,y)]_1 \longmapsto (x,y)$

bierzemy reprezentanta z $]0,1[\times \mathbb{R}$ $\qquad$ bierzemy reprezentanta z $]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[\times \mathbb{R}$

Część wspólna $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{U}_1$ jest zbiorem niespójnym. Zamiana zmiennych $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ jest postaci

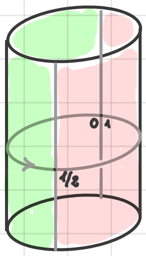


$$\Lambda_1 = \varphi_1 \circ \psi_1^{-1} : \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \to \mathcal{C} \cup \mathcal{A}$$

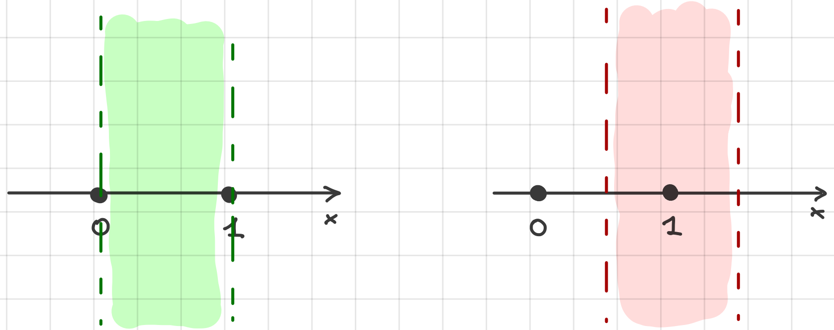
$$(x,y) \longmapsto (x,y) \text{ dla } (x,y) \in \mathcal{A}$$

$$(x,y) \longmapsto (x-1,y) \text{ dla } (x,y) \in \mathcal{B}$$

$\det \Lambda_1' = 1$ dla $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$



Q:



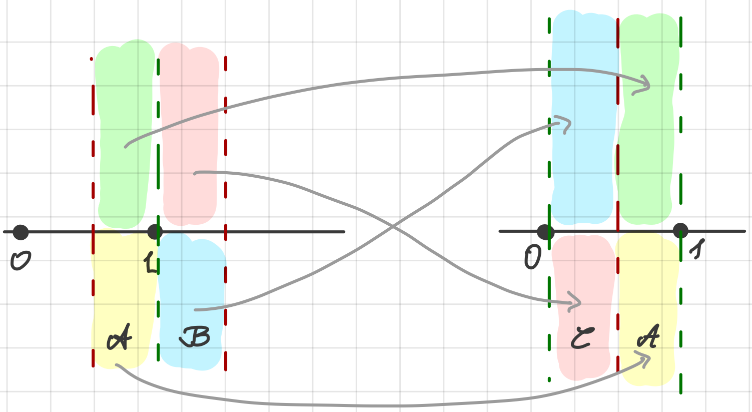
$\mathcal{O}_2 = \pi_2(]0,1[\times \mathbb{R})$ $\qquad$ $\mathcal{U}_2 = \pi_2(]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[\times \mathbb{R})$

$\varphi_1 : \mathcal{O}_1 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\psi_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}^2$

$[(x,y)]_2 \longmapsto (x,y)$ $\qquad$ $[(x,y)]_2 \longmapsto (x,y)$

bierzemy reprezentanta z $]0,1[\times \mathbb{R}$ $\qquad$ bierzemy reprezentanta z $]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[\times \mathbb{R}$

Wszystko na pozór wygląda tak jak poprzednio. Cała różnica tkwi jednak w zamianie zmiennych:



$$\Lambda_2 = \varphi_2 \circ \psi_2^{-1} : \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \to \mathcal{C} \cup \mathcal{A}$$

$$(x,y) \longmapsto (x,y) \text{ dla } (x,y) \in \mathcal{A}$$

$$(x,y) \longmapsto (x-1,-y) \text{ dla } (x,y) \in \mathcal{B}$$

$\det \Lambda_2' = 1$ dla $\mathcal{A}$

$\det \Lambda_2' = -1$ dla $\mathcal{B}$

Wniosek - clou tkwi w zamianie zmiennych!