5 Całkowanie form różniczkowych

5.1 Orientacja

Mówimy, że dwie bazy e i f w skończenie-wymiarowej przestrzeni wektorowej V mają jednakową orientację jeśli macierz przejścia $[id]_e^f$ ma dodatni wyznacznik. Relacja *jednakowej orientacji* jest, jak łatwo sprawdzić, relacją równoważności w zbiorze baz. Dzieli ona zbiór baz na dwie klasy równoważności, które nazywamy *orientacjami*. Mówimy, że przestrzeń wektorowa jest *zorientowana* jeśli ma wyróżnioną orientację. Ze względu na własności wyznacznika orientacja bazy e zmienia się na przeciwną, jeśli zmienimy znak przy jednym z wektorów bazowych lub zamienimy miejscami dwa wektory bazowe. Niektóre przestrzenie wektorowe mają kanoniczną orientację. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ kanoniczna jest orientacja, której reprezentantem jest kanoniczna baza.

Przestrzeń styczna do rozmaitości w punkcie jest skończenie-wymiarową przestrzenią wektorową, więc ma dwie możliwe orientacje. Będziemy mówili, że rozmaitość M jest zorientowana, jeśli przestrzenie styczne we wszystkich punktach mają wybrane orientacje w sposób uzgodniony. Oznacza to, że w dziedzinie każdej mapy $(\mathcal{O}, \varphi)$ orientacje we wszystkich punktach są zgodne lub we wszystkich punktach przeciwne niż orientacja zadana przez bazę $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Zauważmy, że jeśli rozmaitość jest zorientowana, to można na niej wybrać atlas zgodny z orientacją. Istotnie, niech $(\mathcal{O}_i, \phi_i)_{i\in I}$ będzie dowolnym atlasem na M. Konstruujemy nowy atlas $(\mathcal{U}_i, \psi_i)_{i\in I}$ w następujący sposób: Jeśli mapa $(\mathcal{O}_i, \phi_i)$ jest zgodna z orientacją pozostawiamy ją bez zmian kładąc $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$, $\psi_i = \phi_i$. Jeśli baza pochodząca od mapy $(\mathcal{O}_i, \phi_i)$ ma orientację przeciwną kładziemy $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$ oraz jeśli $\phi_i = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ kładziemy $\psi_i = (-x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Orientację na rozmaitości można też zadać wskazując atlas, w którym wyznaczniki wszystkich macierzy przejścia między pochodzącymi od współrzędnych bazami przestrzeni stycznych są dodatnie.

Okazuje się, że nie na wszystkich rozmaitościach da się wybrać orientację. Takie, na których się nie da nazywają się *nieorientowalne*. Najbardziej znanym przykładem rozmaitości nieorientowalnej jest wstęga Moebiusa. Sięgnijmy do drugiego wykładu w trakcie którego zdefiniowaliśmy wstęgę Moebiusa jako zbiór klas równoważności i wprowadziliśmy na niej strukturę rozmaitości różniczkowej wskazując atlas.

Przykład 18 W $\mathbb{R}\times]-1,1[$ definiujemy relację równoważności

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad x'-x = k \in \mathbb{Z}, \;\; y' = (-1)^k y.$$

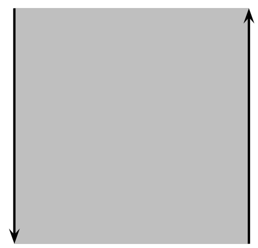
Obserwujemy, że każda klasa równoważności ma reprezentanta w pasku $[0,1[\times]-1,1[$ oraz że odcinki $x=0$ i $x=1$ utożsamiamy w nietrywialny sposób (Rys. 28).

Do opisania wstęgi Moebiusa potrzebne są dwie mapy: z dziedziną $\mathcal{U} = \{[(x,y)] : x \notin \mathbb{Z}\}$ oraz $\mathcal{O} = \{[(x,y)] : x \in]k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}[\}$ (Rys. 29). Dla każdej klasy leżącej w $\mathcal{U}$ istnieje reprezentant (α, y) taki, że $\alpha \in]0,1[$. Definiujemy odwzorowanie

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi([\alpha, y]) = (\alpha, y).$$

Dla każdej klasy leżącej w $\mathcal{O}$ istnieje reprezentant (β, y) taki, że $\beta \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$. Definiujemy odwzorowanie

$$\psi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi([\beta, y]) = (\beta, y).$$



Rys. 28: Wstęga Moebiusa - przypomnienie.

Rys. 29: Wstęga Moebiusa - mapy.

Przyjrzyjmy się jeszcze zamianie współrzędnych. Zbiór $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ składa się z dwóch składowych spójnych $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$

W obszarze $\mathcal{A}$ zamiana zmiennych ma postać $\psi \circ \varphi^{-1}(\alpha, y) \longmapsto (1 + \alpha, -y)$, zaś w obszarze $\mathcal{B}$ zamiana ta jest identycznością. Bazy zadawane przez mapy $(\mathcal{O}, \varphi)$ i $(\mathcal{U}, \psi)$ są takie same w obszarze $\mathcal{B}$ ale inne w obszarze $\mathcal{A}$. W obszarze $\mathcal{A}$ zamiana zmiennych prowadzi do macierzy przejścia

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

z wyznacznikiem -1. Nie da się uzgodnić orientacji drugiej mapy z orientacją pierwszej. Jeśli rozmaitość jest orientowalna, każdy atlas można zastąpić atlasem zgodnym z orientacją, mającym te same dziedziny map. Okazuje się więc, że istotnie wstęga Moebiusa nie jest orientowalna. ♣

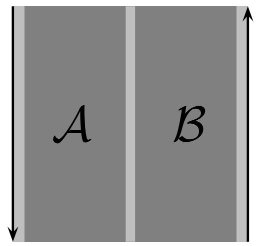
Rozmaitości orientowalne to np. sfera, walec, torus, rzeczywiste przestrzenie projektywne wymiaru nieparzystego. Orientowalne są także wszystkie rozmaitości zanurzone, które są poziomicami odwzorowania spełniającego warunki jak w twierdzeniu o definiowaniu powierzchni zanurzonej. Przyjrzyjmy się bliżej sytuacji, gdy powierzchnia S jest poziomicą funkcji

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Jej przestrzeń styczna w punkcie jest jądrem pochodnej F' i jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^n$. Ze względu na istnienie kanonicznego iloczynu skalarnego można napisać

$$\mathbb{R}^n = \mathsf{T}_x S \oplus \langle gradF(x) \rangle.$$

Ze względu na założenia $gradF$ jest nieznikającym polem wektorowym w punktach S o wartościach w $\mathbb{R}^n$. Orientację powierzchni S można wybrać np. w taki sposób aby w każdym punkcie baza $(gradF, f)$, gdzie f jest bazą $\mathsf{T}_x S$ była zgodna z kanoniczną orientacją $\mathbb{R}^n$. Łatwo sprawdzić, że taki sposób wyboru orientacji jest zgodny. Nieorientowalne są wstęga Moebiusa, butelka Kleina, rzeczywiste przestrzenie projektywne wymiaru parzystego.



Rys. 30: Wstęga Moebiusa - mapy.

5.2 Gładki rozkład jedności

Rozmaitości na których pracujemy to rozmaitości *parazwarte*. Oznacza to, że dla każdego pokrycia otwartego istnieje drobniejsze od niego pokrycie, które jest lokalnie skończone. Warunek *lokalnej skończoności* oznacza, że każdy punkt rozmaitości ma otoczenie, którego przecięcia z elementami pokrycia są niepuste jedynie dla skończonej liczby elementów pokrycia. Składowa spójna rozmaitości parazwartej ma też własność, która nazywa się *przeliczalnością w nieskończoności*. Oznacza to, że istnieje wstępujący ciąg zbiorów zwartych $(\mathcal{K}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że $\mathcal{K}_j \subset \mathfrak{Int}(\mathcal{K}_{j+1})$ oraz $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_i = M$.

Definicja 18 *Gładkim rozkładem jedności* na M związanym z atlasem $(O_i, \varphi_i)_{i\in I}$ nazywamy układ gładkich funkcji α_i o następujących własnościach: (1) $\operatorname{supp}\alpha_i \subset O_i$, (2) każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie $\mathcal{W}$ takie, że $\mathcal{W} \cap \operatorname{supp}\alpha_i \neq \emptyset$ jedynie dla skończonej liczby funkcji α_i, (3) $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$, $\forall p \in M \sum_{i\in I} \alpha_i(p) = 1$.

Twierdzenie 5 *Na rozmaitości parazwartej istnieje gładki rozkład jedności.*

Dowód: Rozkład jedności konstruujemy dla każdej składowej spójnej oddzielnie, dlatego założymy teraz, że M jest spójna. W dalszym ciągu B_r oznaczać będzie otwartą kulę w $\mathbb{R}^n$ o promieniu r. Używać będziemy B_1 i B_3. Potrzebna będzie też funkcja (Rys. 31)

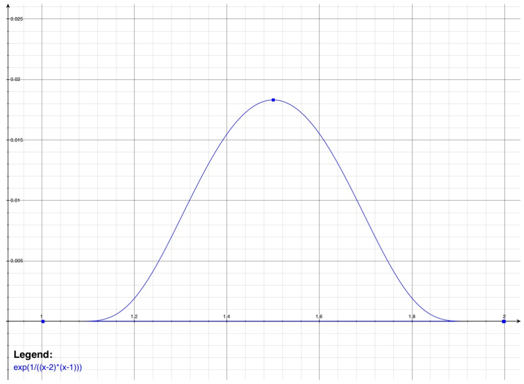
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(t) = \exp\left(\frac{1}{(t-2)(t-1)}\right) \quad \text{dla} \quad t \in]1,2[, \quad h(t) = 0 \quad \text{w przeciwnym razie.}$$

Definiujemy teraz funkcję $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ wzorem

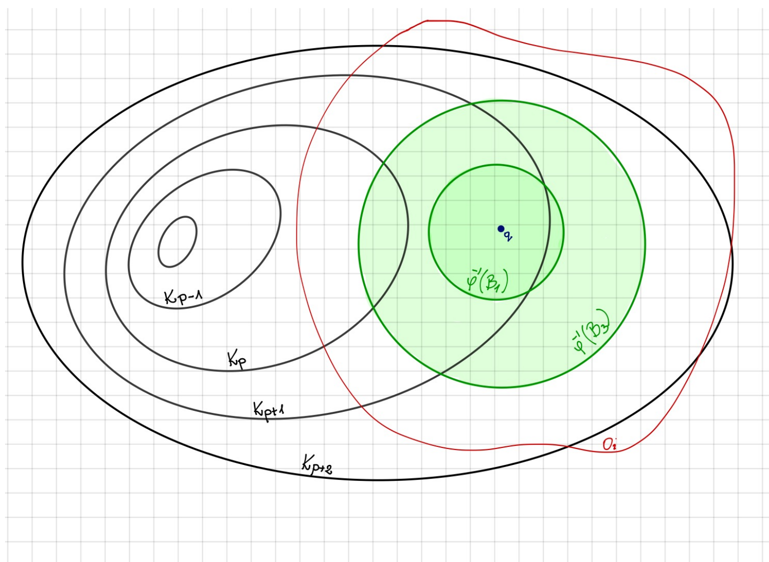
$$f(x) = \frac{\displaystyle\int_x^2 h(t)dt}{\displaystyle\int_1^2 h(t)dt}.$$

Funkcja ta jest gładka, ma wartość 1 dla $x \in [0,1]$ oraz 0 dla $x \in [2,\infty[$.

Jako rozmaitość parazwarta M jest przeliczalna w nieskończoności, to znaczy można ją wyczerpać zbiorami zwartymi $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że $K_i \subset \mathfrak{Int}K_{i+1}$. Rozpoczynamy od danego pokrycia otwartego $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$. Ustalmy na chwilę punkt $q \in M$. Istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $q \in K_{p+1} \setminus K_p$, istnieje także $i \in I$ takie, że $q \in \mathcal{O}_i$. Bierzemy teraz układ współrzędnych $(\mathcal{V}_q, \varphi_q)$ w otoczeniu q taki, żeby $\varphi_q(q) = 0$ $\varphi_q^{-1}(B_3) \subset \mathcal{O}_i$, $\varphi_q^{-1}(B_3) \subset K_{p+2} \setminus K_{p-1}$. Rozważając odpowiednie układy współrzędnych dla wszystkich $q \in M$ otrzymujemy atlas $(V_q, \varphi_q)_{q\in M}$. W



Rys. 31: Wykres funkcji h



Rys. 32: Sytuacja na rozmaitości M

szczególności zbiory $\{\varphi_q^{-1}(B_1)\}_{q \in M}$ stanowią pokrycie otwarte $\mathcal{V}$ rozmaitości M. Wybierzemy teraz z niego pokrycie przeliczalne, lokalnie skończone: $\mathcal{V}$ jest także pokryciem K_1, można więc z niego wybrać pokrycie skończone. Mamy więc $(q_1, \ldots, q_{j_1})$ punktów takich, że $\{\varphi_{q_{j_k}}^{-1}(B_1)\}$ stanowią pokrycie K_1. Zbiór $K_2 \setminus \mathfrak{Int} K_1$ też jest zwarty, więc ma pokrycie skończone wybrane z $\mathcal{V}$. To daje nam kolejne $\{q_{j_1+1}, \ldots, q_{j_2}\}$ punkty, takie, że $\{\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)\}_{k \leqslant j_2}$ jest pokryciem K_2. Indukcyjnie otrzymujemy $(q_{j_p+1}, \ldots, q_{j_{p+1}})$ punktów definiujących pokrycie $K_{p+1} \setminus K_p$ i takie, że $\{\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)\}_{k \leqslant j_{p+1}}$ stanowią pokrycie K_{p+1}. Postępując w ten sposób otrzymujemy przeliczalne pokrycie M zbiorami $\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)$. Oczywiście także układ zbiorów $\mathcal{U}_k = \varphi_{q_k}^{-1}(B_3)$ jest pokryciem M. Wraz z odwzorowaniami φ_{q_k} układ ten tworzy atlas drobniejszy niż wyjściowe pokrycie $(\mathcal{O}_i)$. Łatwo też przekonać się, że atlas ten jest lokalnie skończony. Używając zdefiniowanej wcześniej funkcji f definiujemy rodzinę funkcji d_k wzorem

$$d_k(q) = f(|\varphi_{q_k}(q)|), \quad \text{jeśli} \quad \varphi_{q_k}(q) \quad \text{istnieje, w przeciwnym przypadku} \quad d_k(q) = 0.$$

Ostatecznie

$$\alpha_k(q) = \frac{d_k(q)}{\sum_i d_i(q)}$$

jest szukanym rozkładem jedności. Nośnik każdej z funkcji α_j jest zawarty w którymś ze zbiorów wyjściowego pokrycia $(\mathcal{O}_i)$

Rozkładu jedności można użyć np. do pokazania następującego przydatnego twierdzenia

Twierdzenie 6 *Na rozmaitości orientowalnej wymiaru n istnieje gładka nieznikająca n-forma i odwrotnie, jeśli taka forma istnieje, to rozmaitość jest orientowalna.*

Dowód: Weźmy lokalnie skończony atlas na M taki, że wszystkie zamiany zmiennych mają dodatni jakobian. Niech $(\alpha_i)_{i\in I}$ będzie rozkładem jedności związanym z tym atlasem. W każdej dziedzinie mapy $\mathcal{O}_i$ definiujemy formę ω_i posługując się współrzędnymi $(x_i^1, \dots x_i^n)$:

$$\omega_i = \alpha_i \mathsf{d}x_i^1 \wedge \mathsf{d}x_i^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_i^n.$$

Forma

$$\omega = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathsf{d}x_i^1 \wedge \mathsf{d}x_i^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_i^n$$

ma żądaną własność, tzn jest nieznikająca w każdym punkcie. Istotnie, niech $p \in M$ będzie dowolne, niech także $\{i_1, i_2, \dots i_m\}$ będzie zbiorem indeksów odpowiadających tym elementom atlasu, które przecinają się z otoczeniem $\mathcal{W}$ punktu p. W punkcie p formę ω można więc zapisać jako

$$\omega(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i_k}(p) \mathsf{d}x_{i_k}^1 \wedge \mathsf{d}x_{i_k}^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i_k}^n$$

Punkt p wraz z pewnym otoczeniem leży w dziedzinie każdej z map z indeksami ze zbioru $\{i_1, i_2, \dots i_m\}$, możemy więc wszystkie składniki powyższej sumy zapisać w jednym układzie współrzędnych, na przykład w $(x_{i_1}^1, \dots x_{i_1}^n)$:

$$\omega(p) = \left[\alpha_{i_1}(p) + \sum_{k=2}^{m} \alpha_{i_k}(p) \det\left([\varphi_{i_k} \circ \varphi_{i_1}^{-1}]'\right)\right] \mathsf{d}x_{i_1}^1 \wedge \mathsf{d}x_{i_1}^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i_1}^n.$$

Wszystkie składniki powyższej sumy są dodatnie, zatem cała suma też jest dodatnia, w szczególności nie jest równa zero.

Wykażemy teraz, że jeśli istnieje nieznikająca n-forma to rozmaitość jest orientowalna. Niech ω będzie taką formą. Weźmy także atlas składający się z map o spójnych dziedzinach. W każdej z map forma ω może być zapisana we współrzędnych jako

$$f(x)\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n.$$

Ponieważ dziedzina mapy jest spójna, niezerowa gładka funkcja f, ma ustalony znak. Jeśli jest to znak dodatni mapę tę pozostawiamy bez zmian, jeśli zaś ujemny mapę zmieniamy, na przykład zamieniając pierwszą współrzędną na przeciwną. W ten sposób tworzymy nowy atlas w którym współczynniki funkcyjne przy współrzędnościowych n-formach dla formy ω są dodatnie. Skądinąd wiadomo, że na przecięciu dwóch map współczynniki te różnią się o jakobian zamiany zmiennych. Oznacza to, że wszystkie te jacobiany są dodatnie. Poprawiony przez nas atlas jest zgodny, tzn w szczególności może zadawać orientację na M.$\square$

Orientację na rozmaitości możemy więc zadać wskazując w zgodny sposób orientację każdej z przestrzeni stycznych, wskazując zgodny atlas lub wskazując niezerową formę. Orientacja zadawana przez formę, to ta orientacja przy której współczynniki funkcyjne w zapisie formy we współrzędnych są dodatnie. Formy tego rodzaju nazywa się często *formami objętości*.

5.3 Całkowanie form różniczkowych.

Właściwa całka Riemanna zdefiniowana jest dla funkcji rzeczywistych określonych na „nadającym się do całkowania” obszarze D w $\mathbb{R}^n$. „Nadający się do całkowania” oznacza mierzalny w sensie Jordana. Całkę Riemanna definiuje się korzystając z umiejętności liczenia objętości małych kostek w $\mathbb{R}^n$, tzn. wykorzystując strukturę metryczną na $\mathbb{R}^n$. Na „gołej” rozmaitości nie mamy tej struktury, a próba skorzystania ze współrzędnych prowadzi do niepowodzenia. Nie możemy zdefiniować całki z funkcji $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$ po obszarze $D \subset M$ jako całki z $f \circ \varphi^{-1}$ po obszarze $\varphi(D) \subset \mathbb{R}^n$, nawet zakładając, że D mieści się w dziedzinie jednej mapy, ponieważ wynik całowania zależał będzie od wybranych współrzędnych. Całka w mapie $(\mathcal{O}, \varphi)$ to byłoby wyrażenie

$$\int_{\varphi(D)} f \circ \varphi^{-1},$$

zaś całka w mapie $(\mathcal{U}, \psi)$ to

$$\int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1}.$$

Całki te nie są równe, gdyż (zgodnie z twierdzeniem o zamianie zmiennych)

$$\int_{\varphi(D)} f \circ \varphi^{-1} = \int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1} \left|\det[\psi \circ \varphi^{-1}]\right|.$$

Do całkowania po obszarze na rozmaitości potrzebujemy więc obiektu, który transformuje się „z jakobianem zamiany zmiennych”, czyli n-formy. Przyjrzyjmy się najpierw uproszczonej sytuacji, gdy obszar D mieści się w dziedzinie jednej (a nawet dwóch) map. Niech także ω będzie n-formą na M. Jej wyrażenia we współrzędnych w obu mapach $(\mathcal{O}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ to

$$\omega = a(x)\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n, \qquad \omega = b(y)\mathsf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}y^n.$$

Funkcje a i b związane są równością

$$a(x) = b(\psi \circ \varphi^{-1}(x)) \det[\varphi \circ \psi^{-1}]$$

zatem całki mogą różnić się co najwyżej o znak.

$$\int_{\psi(D)} b = \int_{\varphi(D)} b \circ \psi \circ \varphi^{-1} \left|\det[\varphi \circ \psi^{-1}]\right| = \pm \int_{\varphi(D)} a.$$

Kłopot ze znakiem bierze się z faktu, że wyznacznik jacobianu może być zarówno dodatni jak i ujemny. Wyjściem z tej sytuacji jest zdefiniowanie całki po obszarze zorientowanym. Wybór konkretnej orientacji pozwala używać jedynie współrzędnych zgodnych z orientacją. Możemy już zdefiniować całkę po obszarze D z orientacją $\imath$ w uproszczonej sytuacji, gdy cały obszar mieści się w dziedzinie jednej mapy:

$$\int_{(D,\imath)} \omega = \int_{\varphi(D)} a \circ \varphi^{-1}, \qquad \omega = a\, \mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

gdzie $(\mathcal{O}, \varphi)$ jest mapą zgodną z orientacją. Gdy obszar D nie mieści się w dziedzinie jednej mapy potrzebujemy rozkładu jedności. Weźmy lokalnie skończony atlas $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ zgodny z