orientacją $\imath$ i rozkład jedności $(\alpha_i)_{i\in I}$ związany z tym atlasem. W sposób trywialny prawdą jest, że

$$\omega(p) = \sum_{i\in I} \alpha_i \omega(p)$$

Całkę z formy ω po obszarze D z orientacją $\imath$ możemy teraz zdefiniować wzorem

$$\int_{(D,\imath)} = \sum_{i\in I} \int_{\varphi_i(D\cap\mathcal{O}_i)} (\alpha_i \circ \varphi^{-1})(\omega_i \circ \varphi^{-1})$$

Dla zwartego obszaru D jedynie skończona liczba składników jest niezerowa.

Przykład 19 Obliczyć całkę z formy $\omega = \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$ po fragmencie sfery S^2 dla którego $x \geqslant 0$ i $z \geqslant 0$ z orientacją zadaną przez bazę wektory $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi})$ pochodzące od sferycznego układu współrzędnych.

Forma ω zdefiniowana jest na $\mathbb{R}^3$. Żeby ją scałkować po S^2 trzeba ją najpierw obciąć do S^2. W tym celu zapisujemy włożenie $\kappa : S^2 \to \mathbb{R}^3$ we współrzędnych:

$$\kappa(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta).$$

Obcięcie formy do sfery realizuje się jako pull-back za pomocą włożenia:

$$\kappa^*\omega = \mathsf{d}(\sin\varphi\sin\theta) \wedge \mathsf{d}(\cos\theta) = (\cos\varphi\sin\theta\mathsf{d}\varphi + \sin\varphi\cos\theta\mathsf{d}\theta) \wedge (-\sin\theta\mathsf{d}\theta) = \\ (\cos\varphi\sin\theta\mathsf{d}) \wedge (-\sin\theta\mathsf{d}\theta) = -\cos\varphi\sin^2\theta\; \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\theta$$

Kolejność współrzędnych zgodna z orientacją jest (θ, φ), więc formę zapisać należy jako

$$\omega = -\cos\varphi\sin^2\theta\; \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\theta = \cos\varphi\sin^2\theta\; \mathsf{d}\theta \wedge \mathsf{d}\varphi$$

Obszar całkowania we współrzędnych (θ, φ) to $[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ostatecznie

$$\int_{(D,\imath)} \omega = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cos\varphi\sin^2\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}\cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$

♣

5.4 Rozmaitość z brzegiem

W dalszym ciągu E oznaczać będzie półprzestrzeń w $\mathbb{R}^n$, tzn. zbiór

$$E = \{(x^1, x^2, \dots x^n) \in \mathbb{R}^n : \quad x^1 \leqslant 0\}$$

z topologią indukowaną z $\mathbb{R}^n$ (zbiory otwarte w E to przecięcia zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$ z E). Hiprepłaszczyznę $\{x^1 = 0\}$ oznaczać będziemy Π. Zauważmy, że jeśli $\mathcal{O}$ i $\mathcal{U}$ są otwarte w E oraz $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{U}$ jest homeomorfizmem, to obcięcie $\varphi_{|\mathcal{O}\cap\Pi}$ jest homeomorfizmem $\mathcal{O}\cap\Pi$ i $\mathcal{U}\cap\Pi$. Zbiór E służy jako „standardowa" rozmaitość z brzegiem, podobnie jak $\mathbb{R}^n$ jest „standardową" rozmaitością (bez brzegu). Każdy kawałek rozmaitości z brzegiem powinien wyglądać jak kawałek E. Może to być kawałek brzegowy, albo kawałek z wnętrza. Do zdefiniowania struktury gładkiej rozmaitości z brzegiem potrzebujemy jeszcze pojęcia gładkości odwzorowań obszarów, których przecięcie z Π jest niepuste. Odwzorowanie $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{U}$ jest gładkie jeśli da się rozszerzyć do gładkiego odwzorowania $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{U}}$ takiego, że $\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte i $\mathcal{O} = E\cap\hat{\mathcal{O}}, \mathcal{U} = E\cap\hat{\mathcal{U}}$. W takim przypadku $\varphi_{|\mathcal{O}\cap\Pi}$ też jest gładkie.

Definicja 19 Przestrzeń topologiczna M jest *gładką rozmaitością z brzegiem* jeśli dla każdego $q \in M$ istnieją zbiory otwarte $q \in \mathcal{O} \subset M$, $\mathcal{U} \subset E$ i homeomorfizm $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{U}$. Jeśli ponadto $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$, to odwzorowanie $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ jest gładkie.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"] & \mathcal{U} \arrow[dl, "\varphi' \circ \varphi^{-1}"] \\
\mathcal{U}' &
\end{tikzcd}$$

W rozmaitości z brzegiem wyróżniamy punkty wewnętrzne, tzn. takie, które mają otoczenia homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ i pozostałe, które nazywamy *brzegowymi*. Zbiór punktów brzegowych oznaczamy ∂M i nazywamy *brzegiem rozmaitości*. Zauważmy, że brzeg rozmaitości z brzegiem sam jest gładką rozmaitością (bez brzegu). Istotnie, jeśli $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ jest atlasem na M, to $(\mathcal{U}_i \cap \partial M, \varphi_{i|\mathcal{U}_i \cap \partial M})_{i \in I}$ jest atlasem na brzegu.

Fakt 8 *Niech M będzie orientowalną rozmaitością z brzegiem. Wtedy ∂M też jest orientowalna. Jeśli M jest zorientowana, to na ∂M istnieje wyróżniona orientacja.*

Dowód. Wybierzmy jedną z orientacji na M. Niech $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ będzie atlasem zgodnym z orientacją. Indukowany atlas na M, którego dziedzinami są zbiory $\mathcal{O}_i \cap \partial M$ jest także atlasem zgodnym, tzn. wyznaczniki macierzy przejścia między współrzędnymi są dodatnie. Zauważmy, że jeśli $\varphi_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną $\mathcal{O}$ to $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \ldots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną $\mathcal{O}_i \cap \partial M$. Atlas $(\mathcal{O}_i \cap \partial M, \tilde{\varphi}_i)$ zadaje indukowaną orientację brzegu.$\square$
Jeśli orientację M oznaczymy $\imath$ to orientację indukowaną ∂M oznaczać będziemy $\partial \imath$

Twierdzenie 7 (G.G. Stokes) *Niech M będzie zwartą zorientowaną powierzchnią z brzegiem wymiaru n i niech ω będzie $n-1$-formą na M, wówczas*

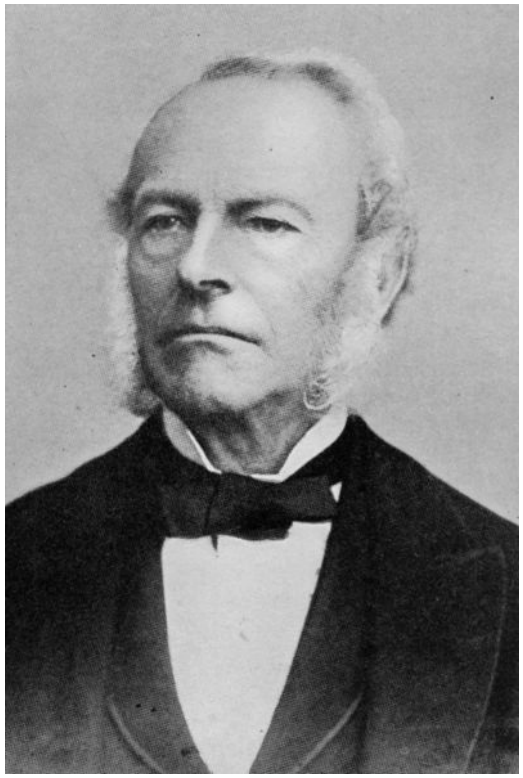
$$\int_{(M,\imath)} \mathsf{d}\omega = \int_{(\partial M, \partial \imath)} \omega.$$

Żeby uzyskać wgląd w sytuację zobaczmy najpierw jak wygląda całkowanie po kostce w $\mathbb{R}^n$. Kostka co prawda, nie jest rozmaitością z brzegiem z powodu kantów (brzeg jest jedynie kawałkami powierzchnią), jednak z punktu widzenia całkowania kanty nie są kłopotliwe. Niech D będzie n-wymiarową kostką, tzn.

$$D = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Brzeg D jest jedynie kawałkami powierzchnią, ale to nie bardzo przeszkadza. $(n-1)$-forma ω do całkowania po brzegu D może zostać zapisana w następujący sposób:

$$\omega = \omega_1 \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n - \omega_2 \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n + \cdots + (-1)^{n+1} \omega_n \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{n-1}.$$



Rys. 33: Sir George Gabriel Stokes.

Różniczkujemy:

$$\mathsf{d}\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2}\mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n + \cdots +$$
$$(-1)^{n+1}\frac{\partial \omega_n}{\partial x^2}\mathsf{d}x^n \wedge \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{n-1} =$$
$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n + \cdots +$$
$$\frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{k-1} \wedge \mathsf{d}x^n =$$
$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}\right)\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

Oznaczamy teraz $\imath$ orientację kanoniczną $\mathbb{R}^n$ i całkujemy:

$$\int_{D,\imath} \mathsf{d}\omega = \int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_1}^{b_1} \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \mathsf{d}x^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \mathsf{d}x^i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_1}^{b_1} \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \mathsf{d}x^n \left(\omega_i(x^1, \ldots, b_i, \ldots x^n) - \omega_i(x^1, \ldots, a_i, \ldots x^n) \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\{x^i = b^i\}} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^n - \sum_{i=1}^{n} \int_{\{x^i = a^i\}} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^n =$$

W powyższym wzorze $\{x^i = b^i\}$ oznacza ścianę kostki daną równaniem $x^i = b^i$. Rozważmy więc parę ścian z ustaloną i-tą współrzędną. Forma ω obcięta do ściany $\{x^i = b^i\}$, jest równa

$$\omega_{|\{x^i = b^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \ldots, b^i, \ldots, x^k) \mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i-1} \wedge \mathsf{d}x^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

a do ściany $\{x^i = a^i\}$

$$\omega_{|\{x^i = a^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \ldots, a^i, \ldots, x^k) \mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i-1} \wedge \mathsf{d}x^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

Orientacja ściany $\{x^i = b_i\}$ indukowana przez orientację kanoniczną $\mathbb{R}^n$ jest to orientacja zgodna z

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \tag{10}$$

a_i

jeśli i jest nieparzyste a przeciwna gdy i parzyste. Odwrotnie jest na ścianie $\{x^i = b_i\}$: orientacja indukowana jest zgodna z (10) jeśli i parzyste i przeciwna jeśli i nieparzyste Można więc napisać, że

$$\int_{\{x^i = b^i\}} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^n = (-1)^{i+1} \int_{(\{x^i = b^i\}, \partial\imath)} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \wedge \cdots^{\text{bez } i} \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

i

$$\int_{\{x^i = a^i\}} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^n = (-1)^{i} \int_{(\{x^i = a^i\}, \partial\imath)} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \wedge \cdots^{\text{bez } i} \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

i dalej

$$\int_{\{x^i = b^i\}} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^n = (-1)^{i+1} \int_{(\{x^i = b^i\}, \partial\imath)} (-1)^{i+1} \omega = \int_{(\{x^i = b^i\}, \partial\imath)} \omega,$$

$$\int_{\{x^i = a^i\}} (\omega_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^n = (-1)^{i} \int_{(\{x^i = a^i\}, \partial\imath)} (-1)^{i+1} \omega = -\int_{(\{x^i = a^i\}, \partial\imath)} \omega.$$

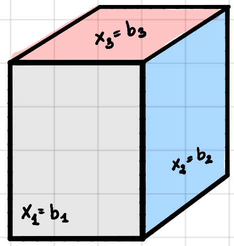
Możemy zatem kontynuować pierwotny rachunek

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{(\{x^i = b^i\}, \partial\imath)} \omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{(\{x^i = a^i\}, \partial\imath)} \omega = \int_{(\partial D, \partial\imath)} \omega.$$

Twierdzenie Stokes'a na kostce zostało zatem udowodnione. Z bardziej skomplikowanymi obszarami poradzimy sobie używając rozkładu jedności:

Wersja wykładowa: kostka w $\mathbb{R}^3$

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$



$\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = \omega_1 \, dx^2 \wedge dx^3 - \omega_2 \, dx^1 \wedge dx^3 + \omega_3 \, dx^1 \wedge dx^2$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 =$$

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

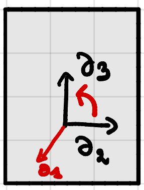
$$\int_{(D,+)} d\omega = \int_D \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^1 dx^2 dx^3 = \int_D \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3 +$$

$$\int_D \frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} dx^1 dx^2 dx^3 + \int \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{a_2}^{b_2} dx^2 \int_{a_3}^{b_3} dx^3 \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} dx^1 \int_{a_3}^{b_3} dx^3 \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 + \int_{a_1}^{b_1} dx^1 \int_{a_2}^{b_2} dx^2 \int_{a_3}^{b_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} dx^3 =$$

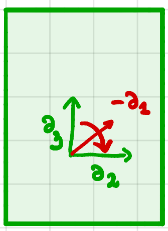
$$= \int_{\{x^1 = b^1\}} \omega_1 \, dx^2 dx^3 - \int_{\{x_1 = a_1\}} \omega_1 \, dx^2 dx^3 + \int_{\{x_2 = b_2\}} \omega_2 \, dx^1 dx^3 - \int_{\{x_2 = a_1\}} \omega_2 \, dx^1 dx^3 +$$

$$+ \int_{\{x^3 = b^3\}} \omega_3 \, dx^1 \wedge dx^2 - \int_{\{x^3 = b^3\}} \omega_3 \, dx^1 dx^2 =$$



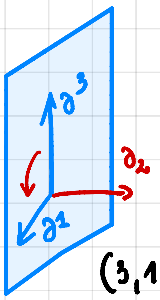
(2,3)

$$\int_{(\{x^1 = b^1\}, (2,3))} \omega_1 \, dx^2 \wedge dx^3$$



(3,2)

$$\int_{(\{x^1 = a^1\}, (3,2))} \omega_1 \, dx^3 \wedge dx^2$$



(3,1)

$$\int_{\{x_2 = b_2\}} \omega_2 \, dx^3 \wedge dx^1$$

$$= \int_{(\{x^1=b^1\},(2,3))} \omega_1 dx^2\wedge dx^3 - \int_{(\{x^1=a^1\},(3,2))} \omega_1 dx^3\wedge dx^2 + \int_{(\{x_2=b^2\},(3,1))} \omega_2 dx^3\wedge dx^1 - \int_{(\{x_2=a_2\},(1,3))} \omega_2 dx^1\wedge dx^3 +$$

$$+ \int_{(\{x^3=b^3\},(1,2))} \omega^3 dx^1\wedge dx^2 - \int_{(\{x^3=a^3\},(2,1))} \omega^3 dx^2\wedge dx^1 =$$

orientacje kanoniczne brzegu

$$= \int_{(\{x^1=b^1\},(2,3))} \omega_1 dx^2\wedge dx^3 + \int_{(\{x^1=a^1\},(3,2))} \omega_1 dx^2\wedge dx^3 + \int_{(\{x^2=b^2\},(3,1))} -\omega_2 dx^1\wedge dx^3 + \int_{(\{x^2=a^2\},(1,3))} -\omega_2 dx^1\wedge dx^3$$

zamienione!

zmiana znaku

$$+ \int_{(\{x^3=b^3\},(1,2))} \omega_3 dx^1\wedge dx^2 + \int_{(\{x^3=a^3\},(2,1))} \omega_3 dx^1\wedge dx^2 = \int_{(\partial D,\partial +)} \omega_1 dx^2\wedge dx^3 - \omega_2 dx^1\wedge dx^3 + \omega_3 dx^1\wedge dx^2$$

$$= \int_{(\partial D,\partial +)} \omega$$

W powyższym rachunku użyto faktu, że

$$\omega\Big|_{\{x^1=c\}} = \omega_1(c, x^2, x^3)\, dx^2\wedge dx^3, \text{ gdyż}$$

$$\omega_2 dx^1\wedge dx^3\Big|_{\{x^1=c\}} = 0 \quad \text{i} \quad \omega_3 dx^1\wedge dx^2\Big|_{\{x^1=c\}} = 0$$

Dowód: Niech M będzie jak w założeniach twierdzenia. Weźmy skończony atlas $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ na M zgodny z orientacją. Zbiór indeksów I może być skończony, gdyż rozmaitość M jest zwarta. $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i\in I}$ oznaczać będzie odpowiedni atlas na ∂M. Korzystać będziemy także ze związanego z pokryciem $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ rozkładu jedności $(\alpha_i)_{i\in I}$. Zauważmy najpierw, że

$$\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}(1\cdot\omega) = \mathsf{d}\left((\sum_{i\in I}\alpha_i)\omega\right) = \sum_{i\in I}\mathsf{d}(\alpha_i\omega).$$

Z drugiej jednak strony

$$\mathsf{d}\left((\sum_{i\in I}\alpha_i)\omega\right) = \mathsf{d}(\sum_{i\in I}\alpha_i)\wedge\omega + (\sum_{i\in I}\alpha_i)\mathsf{d}\omega = 0 + \sum_{i\in I}(\alpha_i\mathsf{d}\omega).$$

Podsumowując, skoro zachodzi równość form

$$\mathsf{d}\omega = \sum_{i\in I}\mathsf{d}(\alpha_i\omega) = \sum_{i\in I}(\alpha_i\mathsf{d}\omega),$$

to zachodzi także równość całek

$$I = \int_{(M,\imath)}\mathsf{d}\omega = \int_{(M,\imath)}\sum_{i\in I}\mathsf{d}(\alpha_i\omega) = \int_{(M,\imath)}\sum_{i\in I}(\alpha_i\mathsf{d}\omega).$$

Zajmiemy się środkowym wyrażeniem

$$I = \int_{(M,\imath)}\sum_{i\in I}\mathsf{d}(\alpha_i\omega) = \sum_{i\in I}\int_{(M,\imath)}\mathsf{d}(\alpha_i\omega).$$

Każda z form $\alpha_i\omega$ ma nośnik w $\mathcal{O}_i$, podobnie $\mathsf{d}(\alpha_i\omega)$, całkę można więc zapisać w i-tym układzie współrzędnych.

$$I = \sum_{i\in I}\int_{(\mathcal{O}_i,\imath)}\mathsf{d}(\alpha_i\omega).$$

$\alpha_i\omega$ jest $(n-1)$-formą, więc ma postać

$$\alpha_i\omega = \sum_{k=1}^{n} f_i(x_i^1,\ldots x_i^n)\mathsf{d}x_i^1\wedge\cdots^{(\text{bez k})}\cdots\wedge\mathsf{d}x_i^n . (-1)^{k+1}$$

$$\mathsf{d}(\alpha_i\omega) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i^k}\mathsf{d}x_i^1\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x_i^n$$

Z definicji całki z formy otrzymujemy

$$\int_{(\mathcal{O}_i,\imath)}\mathsf{d}(\alpha_i\omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i^k}\mathsf{d}x_i^1\cdots\mathsf{d}x_i^n = \sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)}\frac{\partial f_i}{\partial x_i^k}\mathsf{d}x_i^1\cdots\mathsf{d}x_i^n =$$

Korzystamy z twierdzenia Fubiniego

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_k}\mathsf{d}x_i^1\cdots^{(\text{bez k})}\cdots\mathsf{d}x_i^n\int_{a^k(x)}^{b^k(x)}\frac{\partial f_i}{\partial x_i^k}\mathsf{d}x_i^k =$$

Obszar $\mathcal{D}_k$ oraz granice całkowania $a^k(x)$, $b^k(x)$ są dobrane jak w twierdzeniu Fubiniego, a zależność od x wskazuje na zależność granic od punktu w $\mathcal{D}_k$.

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_k} \mathsf{d}x_i^1 \cdots^{(\text{bez k})} \cdots \mathsf{d}x_i^n \left(f_i(x^1, \ldots, b^k(x), \ldots, x^n) - f_i(x^1, \ldots, a^k(x), \ldots, x^n) \right)$$

Jeśli $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$, wtedy wartości funkcji f_i w punktach granicznych są równe zero, gdyż nośnik f_i zawiera się w $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$. Do całki wkład dają więc tylko te układy współrzędnych, które są brzegowe, tzn $\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap \Pi \neq \emptyset$. Taki układ współrzędnych ma szczególną postać, tzn. wyróżniona jest w nim pierwsza współrzędna. Wkład do całki daje jedynie składnik z $k = 1$, gdyż w pozostałych punktach granicznych f_i także jest zero. Dla $k = 1$ granica górna całkowania $b^1(x) = 0$. W granicy dolnej także funkcja f_i znika. Całka taka ma postać

$$\int_{(\mathcal{O}_i, \imath)} \mathsf{d}(\alpha_i \omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap \Pi} f_i(0, x^2, \ldots, x^n) \mathsf{d}x^2 \cdots \mathsf{d}x^n = \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \ldots, x^n) \mathsf{d}x^2 \cdots \mathsf{d}x^n.$$

Zgodnie z definicją całki na rozmaitości

$$\sum_{i \in I} \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \ldots, x^n) \mathsf{d}x^2 \cdots \mathsf{d}x^n = \int_{(\partial M, \partial \imath)} \omega,$$

gdyż $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)$ stanowi atlas na ∂M zgodny z orientacją a obcięcie (α_i) do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu.$\square$

5.5 Operatory różniczkowe na rozmaitości z metryką

W trakcie tego wykładu dyskutować będziemy obiekty, które zdefniować można na rozmaitości M wyposażonej w strukturę metryczną g. Szczególną uwagę zwrócimy na klasyczne wersje Twierdzenia Stokesa w analizie wektorowej. Rozmaitość M z metryką g nazywana jest *rozmaitością Riemanna.* Tensor metryczny g jest cięciem wiązki tensorowej $\mathsf{T}^*M \otimes \mathsf{T}^*M \to M$ o tej własności, że w każdym punkcie $q \in M$, g_q jest niezdegenerowaną, dwuliniową symetryczną formą na przestrzeni stycznej, dodatnio-określoną. Innymi słowy g_q zadaje na $\mathsf{T}M$ iloczyn skalarny.

Przypomnijmy sobie kilka faktów algebraicznych. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie-wymiarową a g iloczynem skalarnym określonym na tej przestrzeni. Iloczyn skalarny definiuje odwzorowanie

$$G : V \to V^*, \qquad G(v) = g(v, \cdot).$$

Fakt, że iloczyn skalarny jest symetryczny powoduje, że odwzorowanie G jest samosprzężone. Fakt, że iloczyn skalarny jest niezdegenerowany powoduje, że G jest izomorfizmem liniowym. Dodatkowym obiektem związanym z iloczynem skalarnym jest forma kwadratowa $\tilde{g}$, która służy do definiowania długości wektora:

$$\tilde{g}(v) = g(v, v), \quad \|v\| = \sqrt{\tilde{g}(v)}.$$

My pracować będziemy gównie z g i G. Jeśli w V wybierzemy bazę $e = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ iloczyn skalarny oraz odpowiedni samosprzężony izomorfizm przedstawić możemy przy pomocy macierzy. Macierz formy g w bazie e oznaczamy zazwyczaj $[g]_e$. Dla wygody będziemy także używać