Obszar $\mathcal{D}_k$ oraz granice całkowania $a^k(x)$, $b^k(x)$ są dobrane jak w twierdzeniu Fubiniego, a zależność od x wskazuje na zależność granic od punktu w $\mathcal{D}_k$.

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_k} \mathsf{d}x_i^1 \cdots^{(\text{bez k})} \cdots \mathsf{d}x_i^n \Big(f_i(x^1, \ldots, b^k(x), \ldots, x^n) - f_i(x^1, \ldots, a^k(x), \ldots, x^n) \Big)$$

Jeśli $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$, wtedy wartości funkcji f_i w punktach granicznych są równe zero, gdyż nośnik f_i zawiera się w $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$. Do całki wkład dają więc tylko te układy współrzędnych, które są brzegowe, tzn $\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap \Pi \neq \emptyset$. Taki układ współrzędnych ma szczególną postać, tzn. wyróżniona jest w nim pierwsza współrzędna. Wkład do całki daje jedynie składnik z $k = 1$, gdyż w pozostałych punktach granicznych f_i także jest zero. Dla $k = 1$ granica górna całkowania $b^1(x) = 0$. W granicy dolnej także funkcja f_i znika. Całka taka ma postać

$$\int_{(\mathcal{O}_i,\imath)} \mathsf{d}(\alpha_i\omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)\cap\Pi} f_i(0, x^2, \ldots, x^n)\mathsf{d}x^2 \cdots \mathsf{d}x^n = \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \ldots, x^n)\mathsf{d}x^2 \cdots \mathsf{d}x^n.$$

Zgodnie z definicją całki na rozmaitości

$$\sum_{i\in I} \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \ldots, x^n)\mathsf{d}x^2 \cdots \mathsf{d}x^n = \int_{(\partial M,\partial\imath)} \omega,$$

gdyż $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)$ stanowi atlas na ∂M zgodny z orientacją a obcięcie (α_i) do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu.$\square$

5.5 Operatory różniczkowe na rozmaitości z metryką

W trakcie tego wykładu dyskutować będziemy obiekty, które zdefniować można na rozmaitości M wyposażonej w strukturę metryczną g. Szczególną uwagę zwrócimy na klasyczne wersje Twierdzenia Stokesa w analizie wektorowej. Rozmaitość M z metryką g nazywana jest *rozmaitością Riemanna.* Tensor metryczny g jest cięciem wiązki tensorowej $\mathsf{T}^*M \otimes \mathsf{T}^*M \to M$ o tej własności, że w każdym punkcie $q \in M$, g_q jest niezdegenerowaną, dwuliniową symetryczną formą na przestrzeni stycznej, dodatnio-określoną. Innymi słowy g_q zadaje na $\mathsf{T}M$ iloczyn skalarny.

Przypomnijmy sobie kilka faktów algebraicznych. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie-wymiarową a g iloczynem skalarnym określonym na tej przestrzeni. Iloczyn skalarny definiuje odwzorowanie

$$G : V \to V^*, \qquad G(v) = g(v, \cdot).$$

Fakt, że iloczyn skalarny jest symetryczny powoduje, że odwzorowanie G jest samosprzężone. Fakt, że iloczyn skalarny jest niezdegenerowany powoduje, że G jest izomorfizmem liniowym. Dodatkowym obiektem związanym z iloczynem skalarnym jest forma kwadratowa $\tilde{g}$, która służy do definiowania długości wektora:

$$\tilde{g}(v) = g(v, v), \quad \|v\| = \sqrt{\tilde{g}(v)}.$$

My pracować będziemy gównie z g i G. Jeśli w V wybierzemy bazę $e = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ iloczyn skalarny oraz odpowiedni samosprzężony izomorfizm przedstawić możemy przy pomocy macierzy. Macierz formy g w bazie e oznaczamy zazwyczaj $[g]_e$. Dla wygody będziemy także używać oznaczenia $\mathcal{G}_e$. Będziemy także pomijać symbol bazy, jeśli będzie jasne jakiej bazy używamy. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ mają postać

$$\mathcal{G}_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Zwróćmy uwagę na położenie indeksów, które, jakkolwiek *historyczne*, ma jednak uzasadnienie. Tradycyjnie indeksy przy współrzędnych wektora piszemy na górze oraz sumujemy po powtarzających się indeksach górnym i dolnym. W tej sytuacji, jeśli $v = v^i e_i$ oraz $w = w^i e_i$ to

$$g(v, w) = \mathcal{G}_{ij} v^i w^j$$

albo

$$g(v, w) = ([v]^e)^T \mathcal{G}_e [w]^e.$$

Jeśli $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ oznacza bazę dualną do e to

$$G(v) = \mathcal{G}_{ij} v^i \varepsilon^j \in V^*.$$

Zapisać też można

$$g = \mathcal{G}_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j.$$

Zamiana bazy w macierzy formy dwuliniowej odbywa się według wzoru

$$\mathcal{G}_f = Q^T \mathcal{G}_e Q,$$

gdzie Q jest macierzą odwzorowania identycznościowego na V zapisanego w bazach f i e, dokładniej

$$Q = [id_V]^e{}_f.$$

Zamieniając bazę w macierzy odwzorowania używamy macierzy przejścia wzajemnie odwrotnych. Tu obkładamy wyjściową macierz macierzą przejścia i do niej transponowaną. Odzwierciedla to charakter macierzy $\mathcal{G}$. Jest to oczywiście także kwadratowa tabelka liczb, ale funkcjonująca inaczej niż zwykła macierz odwzorowania.

Tensor metryczny na rozmaitości zadaje powyżej opisaną strukturę punkt po punkcie na przestrzeniach stycznych i kostycznych. Mamy więc iloczyn skalarny g na każdej z przestrzeni stycznych, możemy liczyć długości wektorów stycznych oraz dysponujemy izomorfizmem samosprzężonym

$$G : \mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}^*M.$$

Izomorfizm ten pozwala utożsamiać wektory z kowektorami, co jest wykorzystywane w teoriach fizycznych, choć zazwyczaj pomijane milczeniem jako oczywiste. Mając do dyspozycji lokalny układ współrzędnych $(\mathcal{O}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ mamy także w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej i przestrzeni kostycznej. Możemy zatem używać macierzy związanej z tensorem metrycznym. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ są teraz nie liczbami a funkcjami gładkimi na M. Załóżmy ponadto, że rozmaitość M jest orientowalna oraz że wybrano na niej orientację $\imath$. Orientowalność wiąże się z istnieniem nieznikających n-form nazywanych formami objętości. Istnienie tensora metrycznego i wybranej orientacji pozwala zdefiniować w kanoniczny sposób formę objetości związaną z metryką. Jeśli układ współrzędnych jest zgodny z orientacją, to metryczna forma objętości Ω ma postać

$$\Omega = \sqrt{\det \mathcal{G}}\, \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

Struktura metryczna i orientacja pozwala utożsamiać pola wektorowe i jednoformy oraz pola wektorowe i $n-1$ formy. Jeśli X jest polem wektorowym na M, to $G \circ X$ jest jednoformą a $i_X \Omega$ jest $(n-1)$-formą.

Gradient: Gradient jest polem wektorowym odpowiadającym różniczce funkcji. Jeśli f jest funkcją gładką na M

$$\operatorname{grad} f = G^{-1} \circ \mathsf{d} f.$$

Definicja ta jest niezależna od współrzędnych. Pozwala jednak w łatwy sposób zapisywać gradient w dowolnych współrzędnych bez uciążliwego zamieniania zmiennych w operatorach różniczkowych. Prawidłowa definicja gradientu pozwala także odpowiedzieć na pytanie, *czy dane pole wektorowe X jest gradientem funkcji, tzn. czy ma potencjał sklarny.* Pole mające potencjał skalarny odpowiada jednoformie, która jest różniczką, zatem jej różniczka musi być zero. Warunkiem koniecznym potencjalności pola jest więc, aby

$$\mathsf{d}(G \circ X) = 0.$$

Istnienie bądź nieistnienie potencjału zależy już dalej od kształtu obszaru, jak w Lemacie Poincarè.

Rotacja: Na trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości z metryką zdefiniować można rotację pola wektorowego $(\operatorname{rot} A)$ następującym wzorem

$$\mathsf{d}(G \circ A) = \imath_{\operatorname{rot} A} \Omega.$$

Sprawdźmy, że na $\mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym i kanoniczną orientacją otrzymamy znane nam już wzory na rotację pola wektorowego w kartezjańskim układzie współrzędnych. Niech

$$A = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Korzystając z faktu, że kanoniczne współrzędne w $\mathbb{R}^3$ są ortonormalne otrzymujemy

$$G \circ A = A_x \mathsf{d}x + A_y \mathsf{d}y + A_z \mathsf{d}x.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\mathsf{d}(G \circ A) = \frac{\partial A_x}{\partial y} \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial A_x}{\partial z} \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial x} \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}y + \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z =$$
$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x$$

Oznaczmy teraz $B = \operatorname{rot} A$. Forma objetości w kanonicznych współrzędnych to $\Omega = \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$. Mamy zatem

$$\imath_B \Omega = B_x \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + B_y \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + B_z \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

i z porównania obu wzorów otrzymujemy

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

co zgadza się z tradycyjnym wzorem na rotację. Zaletą naszej definicji jest, że możemy teraz zapisać rotację w dowolnym układzie współrzędnych nie dokonując uciążliwej zamiany zmiennych.

Fakt 9

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0.$$

Dowód:

$$\imath_{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f}\Omega = \mathsf{d}(G \circ \mathrm{grad}\, f) = \mathsf{d}(G \circ G^{-1} \circ \mathsf{d}f) = \mathsf{dd}f = 0.$$

Zwężenie w formą objętości jest równe zero jedynie dla pola zerowego, zatem istotnie $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$. □

Powyższy fakt wskazuje, że jedną z metod sprawdzania potencjalności pola jest obliczenie jego rotacji. Fakt, iż rotacja gradientu znika, wynika ze znikania drugiej różniczki.

Dywergencja: Na metrycznej orientowalnej rozmaitości dowolnego wymiaru zdefiniować można dywergencję pola wektorowego wzorem

$$(\mathrm{div}\, X)\Omega = \mathsf{d}(\imath_X \Omega).$$

Dywergencja nie zależy od orientacji względem której wybrana jest forma objętości Ω, gdyż pojawia się ona po obydwu stronach równania. Ewentualna zmiana znaku odbywa się jednocześnie po obu stronach równania. W kartezjańskim układzie współrzędnych łatwo jest wypisać dywergencję:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}(\imath_X\Omega) &= \mathsf{d}(X_x \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + X_y \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + X_z \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y) = \\ &\frac{\partial X_x}{\partial x}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + \frac{\partial X_y}{\partial y}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial X_z}{\partial z}\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \\ &\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z, \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathrm{div}\, X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Także i w tym przypadku bardzo łatwo jest wypisać dywergencję w innym układzie współrzędnych korzystając z definicji a nie z procedury zamiany zmiennych.

Fakt 10

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X = 0$$

Dowód:

$$(\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X)\Omega = \mathsf{d}(\imath_{\mathrm{rot}\, X}\Omega) = \mathsf{d}(\mathsf{d}(G \circ X)) = 0$$

□

Laplasjan: Uogólnieniem znanego z $\mathbb{R}^n$ operatora Laplace'a na rozmaitości (pseudo)Riemanna jest operator Laplace'a-Beltramiego. Jest to operator różniczkowy drugiego rzędu działający na funkcjach, dokładniej

$$\triangle f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f.$$

Znając już postać gradientu i dywegencji we współrzędnych kartezjańskich na $\mathbb{R}^3$ możemy łatwo zapisać laplasjan:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Zapiszmy teraz laplasjan we współrzędnych sferycznych. Zrobimy cały rachunek od początku, żeby pokazać jego efektywność w porównaniu z tradycyjną w takich okolicznościach zamianą zmiennych. Zależność między współrzędnymi kartezjańskimi i sferycznymi w $\mathbb{R}^2$ ma postać:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\sin\vartheta\\
y &= r\sin\varphi\sin\vartheta\\
z &= r\cos\vartheta
\end{aligned}$$

Korzystając z powyższych związków wyznaczamy wektory ∂_r, ∂_φ, ∂_ϑ:

$$\begin{aligned}
\partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial r}\partial_z = \cos\varphi\sin\vartheta\partial_x + \sin\varphi\sin\vartheta\partial_y + \cos\vartheta\partial_z\\
\partial_\varphi &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\partial_y + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\partial_z = -r\sin\varphi\sin\vartheta\partial_x + r\cos\varphi\sin\vartheta\partial_y\\
\partial_\vartheta &= \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\partial_z = r\cos\varphi\cos\vartheta\partial_x + r\sin\varphi\cos\vartheta\partial_y - r\sin\vartheta\partial_z.
\end{aligned}$$

Wiadomo, że baza $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ jest bazą ortonormalną względem kanonicznej metryki na $\mathbb{R}^3$ wyznaczamy elementy macierzowe macierzy $\mathcal{G}$ we współrzędnych sferycznych:

$$\begin{aligned}
&(\partial_r|\partial_r) = \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1\\
&(\partial_\varphi|\partial_\varphi) = r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta = r^2\sin^2\vartheta\\
&(\partial_\vartheta|\partial_\vartheta) = r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta = r^2\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta = r^2\\
&(\partial_r|\partial_\vartheta) = (\partial_\varphi|\partial_\vartheta) = (\partial_r|\partial_\varphi) = 0,
\end{aligned}$$

zatem macierz iloczynu skalarnego w bazie $(\partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\varphi)$ i macierz odwrotna mają postać

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy formę objętości we współrzędnych sferycznych

$$\Omega = r^2\sin\vartheta\,\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\varphi.$$

Wykonujemy niezbędne rachunki

$$\operatorname{grad} f = G^{-1}\circ\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\partial_\varphi$$

$$\imath_{\operatorname{grad} f}\Omega = r^2\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial r}\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\varphi - \sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\varphi + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\vartheta.$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\left(\imath_{\operatorname{grad} f}\Omega\right) &= \mathsf{d}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial r}\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\varphi - \sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\varphi + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\vartheta\right)\\
&= \left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \cos\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \sin\vartheta\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\varphi\\
&= \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right] r^2\sin\vartheta\,\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\varphi.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\triangle f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

5.6 Klasyczne wersje Twierdzenia Stokes'a

Odpowiedniość między polami wektorowymi i jednoformami lub $(n-1)$-formami pozwala zinterpretować poniższe klasyczne wzory analizy wektorowej jako wersje Twierdzenia Stokes'a:

$$\text{(i)}\quad \int_S (\vec{n}|\operatorname{rot} X)d\sigma = \int_{\partial S}(\vec{t}|X)d\ell \qquad \text{(ii)} \int_D \operatorname{div} X\, dv = \int_{\partial D}(\vec{n}|X)d\sigma.$$

Analizując wzory (i) i (ii) używać powinniśmy pojęcia gęstości, która odpowiada tradycyjnemu „elementowi objętości” dv, „elementowi powierzchni” $d\sigma$ czy „elementowi długości” $d\ell$. Nie dyskutowaliśmy jednak form nieparzystych oraz gęstości, dlatego posłużymy się dotychczas wprowadzonym językiem. Na potrzeby wzoru (i) założyć trzeba, że S jest dwuwymiarową zwartą powierzchnią z brzegiem zanurzoną w trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości M z metryką. Na potrzeby wzoru (ii) założyć należy, że D jest n-wymiarową zwartą rozmaitością z brzegiem zanurzoną w n-wymiarowej zorientowanej rozmaitości M. Zajmiemy się najpierw wzorem (ii). W naszym języku „element objętości” to forma objętości zgodna z orientacją i związana z metryką, zatem napisać możemy

$$\int_D \operatorname{div} X\, dv = \int_{(D,\imath)} (\operatorname{div} X)\Omega =$$

Dalej używamy definicji dywergencji i stosujemy twierdzenie Stokes'a

$$= \int_{(D,\imath)} \mathsf{d}(\imath_X\Omega) = \int_{(\partial D,\partial\imath)} \imath_X\Omega =$$

Korzystając z układów współrzędnych typu opisanego w definicji rozmaitości z brzegiem oraz ze stosownego rozkładu jedności na brzegu ∂D $(\tilde{\alpha}_i)_{i\in I}$, rachunek możemy kontynuować następująco

$$= \sum_{i\in I}\int_{(\tilde{\mathcal{O}}_i,+)} \tilde{\alpha}_i X_i^1\sqrt{\det\mathcal{G}_i}\;\mathsf{d}x_i^2\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x_i^n. \tag{11}$$

W powyższym wzorze całkujemy po dziedzinie układu współrzędnych $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2,\ldots,x_i^n)$ na brzegu z orientacją zgodną z kolejnością współrzędnych $(x^2,\ldots,x^n)$. X_i^1 jest pierwszą współrzędną pola wektorowego w układzie współrzędnych $\varphi = (x_i^1, x_i^2,\ldots,x_i^n)$ zaś $\mathcal{G}_i$ to macierz iloczynu skalarnego wyrażona w bazie związanej z układem współrzędnych. Po prawej stronie równości (ii) $d\sigma$ odpowiada formie objętości na brzegu zapisanej dla metryki g obciętej do brzegu. W układzie współrzędnych $\tilde{\varphi}$ forma ta ma postać $\sqrt{\det\mathcal{S}_i}\,\mathsf{d}x_i^2\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x_i^n$. Macierz $\mathcal{S}_i$ jest podmacierzą macierzy $\mathcal{G}_i$ odpowiadającą współrzędnym od 2 wzwyż, tzn.

$$\mathcal{G}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \hline \mathcal{G}_{12} & & & \\ \vdots & & \mathcal{S}_i & \\ \mathcal{G}_{1n} & & & \end{array}\right]$$

Poszukajmy teraz wektora normalnego do powierzchni ∂D skierowanego „na zewnątrz”. Niech $\vec{n} = a^k \partial_k$ (dla uproszczenia notacji wektor $\frac{\partial}{\partial x^k}$ oznaczać będziemy ∂_k. Pomijać także będziemy indeks numerujący układy współrzędnych. Warunek „skierowania na zewnątrz” oznacza, że $a^1 > 0$. Wektor $\vec{n}$ ma być prostopadły do ∂_j dla $j > 1$, czyli

$$0 = g(\vec{n}, \partial_j) = \mathcal{G}_{ik} a^i \delta^k_j = \mathcal{G}_{ij} a^i \quad j > 1. \tag{12}$$

Jednocześnie wektor $\vec{n}$ ma być długości 1, czyli

$$1 = g(\vec{n}, \vec{n}) = \mathcal{G}_{ij} a^i a^j = \sum_j (\sum_i \mathcal{G}_{ij} a^i) a^j = \sum_i \mathcal{G}_{i1} a^i a^1. \tag{13}$$

Wyrażenia (12) i (13) można razem zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \cdots & \mathcal{G}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{n1} & \mathcal{G}_{n2} & \cdots & \mathcal{G}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Macierz $\mathcal{G}$ jest odwracalna. Wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej oznaczamy tradycyjnie $\mathcal{G}^{ij}$. Używając macierzy odwrotnej rozwiążemy równanie (14).

$$a^1 = \mathcal{G}^{1j} \delta^1_j / a^1 \quad \Longrightarrow \quad a^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}.$$

$$a^j = \mathcal{G}^{jk} \delta^1_k / a^1 \quad \Longrightarrow \quad a^j = \mathcal{G}^{j1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}, \quad j > 1$$

Obliczmy teraz $g(\vec{n}, X)$

$$g(\vec{n}, X) = \mathcal{G}_{ij} a^i X^j = \mathcal{G}_{i1} a^i X^1 = X^1 \mathcal{G}_{i1} \mathcal{G}^{i1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}} = X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}.$$

ad

Po prawej stronie wzoru (ii) we współrzędnych mamy więc (skł~~d~~anik pochodzący od jednego układu współrzędnych)

$$\int_{(\tilde{\mathcal{O}}, +)} \alpha (X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}) \sqrt{\det \mathcal{S}} \, \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n. \tag{15}$$

Potrzebujemy związek między $\det \mathcal{G}$ a $\det \mathcal{S}$. W tym celu rozważmy przejście od bazy $e = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ do bazy $f = (\vec{n}, \partial_2, \ldots, \partial_n)$. Macierz przejścia $[id]^e_f$ ma postać

$$[id]^e_f = \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz iloczynu skalarnego w bazie f to

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array} \right],$$

a operacja zmiany bazy daje

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \mathcal{G} \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Liczymy wyznacznik

$$\det \mathcal{S} = (a^1)^2 \det \mathcal{G}$$

i pierwiastek

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = a^1 \sqrt{\det \mathcal{G}}$$

ale $a^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}$, zatem

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = \sqrt{\mathcal{G}^{11}} \sqrt{\det \mathcal{G}}$$

Po podstawieniu powyższego związku do (15) prawa strona (ii) przyjmuje postać

$$\int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} \alpha(X^1/\sqrt{\mathcal{G}^{11}})\sqrt{\det \mathcal{S}}\,\mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n = \\ \int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} \alpha(X^1/\sqrt{\mathcal{G}^{11}})\sqrt{\mathcal{G}^{11}}\sqrt{\det \mathcal{G}}\,\mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n = \\ \int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} \alpha X^1 \sqrt{\det \mathcal{G}}\,\mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

i jest równa lewej stronie (11).

Zajmiemy się teraz wzorem (i). Analizując (ii) ustaliliśmy, że całka

$$\int_{\partial D} (\vec{n}|X) d\sigma = \int_{\partial D} \imath_X \Omega.$$

Skorzystamy z tego przekształcając lewą stronę (i):

$$\int_S (\vec{n}|\mathrm{rot}\, X) d\sigma = \int_S \imath_{\mathrm{rot}\, X}\Omega = \int_S \mathsf{d}(G \circ X) = \int_{\partial S} G \circ X. \tag{16}$$

Zapiszmy teraz formę pod całką w układzie współrzędnych

$$G \circ X = \mathcal{G}_{ij} X^i \mathsf{d}x^j$$

Jeśli

$$I \ni r \mapsto \left(x^1(r), x^2(r), x^3(r)\right) \in \partial S$$

jest parametryzacją brzegu ∂S to

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij}(r) X^i(r) \dot{x}^j \mathsf{d}r$$

Jednostkowy wektor styczny to

$$\vec{t} = \frac{1}{\|\partial r\|}\partial_r$$

natomiast

$$\partial_r = \dot{x}^1\partial_1 + \dot{x}^2\partial_2 + \dot{x}^3\partial_3.$$

Iloczyn skalarny pod całką można zapisać jako

$$\mathcal{G}_{ij}X^i\dot{x}^j = g(X, \partial r) = g(X, \vec{t})\|\partial_r\|.$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę, że

$$d\ell = \|\partial_r\|\mathsf{d}r$$

rachunek (16) można kontynuować

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij}X^i\dot{x}^j\mathsf{d}r = \int_I (X|\vec{t})\|\partial_r\|\mathsf{d}r = \int_{\partial S}(X|\vec{t})d\ell.$$

□

5.7 Gwiazdka Hodge'a

W bardzo podobny sposób do tego, w jaki definiowaliśmy wieloformy na przestrzeni wektorowej, zdefiniować można wielowektory. Skorzystamy tu z prawdziwego dla skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych faktu iż $(V^*)^*$ jest kanonicznie izomorficzna z V. Możemy zamienić rolami V i V^* traktując V jako zbiór funkcji liniowych na V^* i rozważać także zbiór funkcji wieloliniowych antysymetrycznych na V^*, czyli $\bigwedge^k V$. Swój odpowiednik wektorowy ma też konstrukcja iloczynu zewnętrznego. W języku tensorowym mamy

$$v \wedge w = w \otimes w - w \otimes v$$

oraz

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Ponieważ $(V \otimes V)^* \simeq V^* \otimes V^*$ możemy obliczyć $\alpha \wedge \beta$ na $v \wedge w$:

$$\begin{aligned}\langle \alpha \wedge \beta, v \wedge w\rangle &= \langle \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha, v \otimes w - w \otimes v\rangle = \\ &\alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) - \beta(v)\alpha(w) + \beta(w)\alpha(v) = 2[\alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)]\end{aligned}$$

i ogólnie

$$\langle \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n\rangle = k! \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma\, \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}).$$

Oznacza to, że jeśli e i ϵ są parą baz dualnych w V i V^* to układy $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $\epsilon^{j_1} \wedge \epsilon^{j_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{j_k}$ dla $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ prawie są parą baz dualnych. Prawie, bo gdzieś trzeba podzielić przez $k!$. Mając iloczyn skalarny g na V możemy utożsamiać wektory z kowektorami przy pomocy izomorfizmu G. Iloczyn skalarny możemy wprowadzić także na V^*:

$$g(v, w) = (v|w) = \langle G(v), w\rangle = \mathcal{G}_{ij}v^iv^j \qquad \tilde{g}(\alpha, \beta) = (\alpha|\beta) = \langle \alpha, G^{-1}(\beta)\rangle = \mathcal{G}^{ij}\alpha_i\beta_j$$