PODROZMAITOŚĆ: Uzupełnieniem do pojęcia rozmaitości gładkiej i odwzorowania gładkiego (w sensie teorii kategorii: obiekty i morfizmy) trzeba uzupełnić jeszcze o podrozmaitości:

DEFINICJA: Niech M będzie rozmaitością gładką (klasy C^k). Podrozmaitością wymiaru $k \leq \dim M$ nazywamy podzbiór $S \subset M$ taki, że dla każdego $q \in S$ istnieje mapa $(\mathcal{O}, \varphi)$ w otoczeniu q w M taka, że warunek $q \in S$ wyraża się jako znikanie ostatnich $\dim M - k$ współrzędnych. Jeśli położymy $\dim M = m$

$$S \cap \mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} : \varphi^{k+1}(x) = \varphi^{k+2}(x) = \dots = \varphi^{m}(x) = 0\}$$

Współrzędne $(\varphi^1, \dots, \varphi^k)$ mogą posłużyć jako współrzędne w S. W ten sposób S także nabywa struktury rozmaitości.

Sprawdzanie czy konkretne S jest podrozmaitością jest niewygodne. Zazwyczaj robi się to za pomocą twierdzeń o maksymalnym rzędzie. Twierdzeń tych jednak na razie nie możemy jeszcze sformułować. Zwróćmy uwagę na to, że wiemy co to znaczy, że odwzorowanie jest różniczkowalne, ale nie wiemy co to jest pochodna odwzorowania. Temu postaramy się zaradzić w ciągu dwóch kolejnych wykładów.

WEKTORY STYCZNE W czasie wykładu Analiza II omówiony został rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych. Wiadomo zatem jakie odwzorowania $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, w szczególności jakie funkcje na $\mathbb{R}^n$ są różniczkowalne. Korzystając z tego zdefiniowaliśmy różniczkowalne (gładkie) odwzorowanie między rozmaitościami. Wiemy więc co to znaczy że funkcja jest różniczkowalna, ale nie wiemy czym jest pochodna funkcji różniczkowalnej określonej na rozmaitości.

Przyjrzyjmy się równości, która pojawia się w definicji pochodnej funkcji na przestrzeni Banacha X. Do naszych celów wystarczy przestrzeń wymiaru skończonego.

$$f: X \to \mathbb{R} \qquad f(x+\delta x) = f(x) + F'(x)\delta x + R(x,\delta x) \qquad (*)$$

$F'(x)$ jest tutaj odwzorowaniem liniowym na przestrzeni X, o której tutaj myślimy jak o przestrzeni wektorów zaczepionych w punkcie $x \in X$. Od razu widać więc że takie samo równanie można napisać dla funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ określonej na przestrzeni afinicznej A modelowanej na X. Wystarczy, że od punktu $a \in A$ możemy przesuwać się o wektory. Podobnie jak w przypadku pochodnej funkcji określonej na x, pochodna funkcji określonej na A w punkcie $a \in A$ jest elementem $X^* = L(X, \mathbb{R})$.

$$f'(a) \in X^* = L(X, \mathbb{R})$$

Definicji opartej na wzorze $(*)$ nie możemy bezpośrednio przenieść na rozmaitość M, ponieważ od punktu do punktu na M nie przemieszczamy się przy pomocy wektorów. Co prawda mamy współrzędne wokół każdego punktu, ale to samo „przemieszczenie" w różnych współrzędnych będzie zupełnie inaczej wyglądało. Od punktu do punktu na rozmaitości poruszać się można wzdłuż gładkich krzywych. Postaramy się więc wykorzystać krzywe w definicji pochodnej funkcji. W kontekście geometrii różniczkowej nie mówimy pochodna (przynajmniej w tym znaczeniu) tylko **różniczka funkcji w punkcie.**

Potrzebujemy $C^\infty(M)$ - funkcje gładkie na M (lub przynajmniej w otoczeniu punktu), $C^\infty(I, M)$ $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$ - gładkie krzywe w M.

DEFINICJA: W zbiorze par (q, f), $q \in M$, f jest gładką funkcją w otoczeniu q definiujemy relację równoważności

$$(q,f) \sim (q',f') \iff q = q', \ \forall \gamma \in C^\infty(I,M) \ \gamma(0) = q$$
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \gamma = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f' \circ \gamma \qquad (**)$$

Klasę równoważności (q,f) oznaczamy **$df(q)$** i nazywamy **różniczką funkcji f w punkcie q.**

Zauważmy, że zbiór wszystkich różniczek w ustalonym punkcie ma naturalną strukturę przestrzeni wektorowej, która jest dziedziczona z przestrzeni wektorowej funkcji. Łatwo się przekonać, że jeśli $df(q)=df'(q)$ i $dg(q)=dg'(q)$ to $d(f+g)(q)=d(f'+g')(q)$, tzn można, korzystając z reprezentantów zdefiniować

$$df(q)+dg(q):=d(f+g)(q)$$

Podobnie dla mnożenia $df(q)=df'(q) \Rightarrow d(\lambda f)(q)=d(\lambda f')(q)$ zatem

$$\lambda\, df(q):=d(\lambda f)(q)$$

Sprawdzenie poprawności definicji wymaga jedynie zapisania:

$df(q)=df'(q)$ oznacza $\frac{d}{dt} f\circ\gamma(0)=\frac{d}{dt} f'\circ\gamma(0)$, podobnie

$dg(q)=dg'(q)$ oznacza

$$\frac{d}{dt} g\circ\gamma(0)=\frac{d}{dt} g'\circ\gamma(0)$$

$$\frac{d}{dt}(g+f)\circ\gamma(0)=\frac{d}{dt}\left(g\circ\gamma+f\circ\gamma\right)(0)=\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0)+\frac{d}{dt}g\circ\gamma(0)=$$
$$=\frac{d}{dt}(f'\circ\gamma)(0)+\frac{d}{dt}g'\circ\gamma(0)=\frac{d}{dt}\left(f'\circ\gamma+g'\circ\gamma\right)(0)=\frac{d}{dt}(f+g)\circ\gamma(0)$$

Dla mnożenia nie wypisujemy bo nudne!

Przestrzeń wektorowa różniczek funkcji w punkcie q oznaczana będzie T^*_qM i nazywana przestrzenią kostyczną w punkcie q.

PRZYKŁAD: Niech $M=A$ będzie przestrzenią afiniczną modelowaną na przestrzeni wektorowej X. Rozważmy szczególne krzywe $t\longmapsto a+tv$ dla $v\in X$. Warunek równoważności dla tych funkcji przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+tv)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f'(a+tv)$$

Na przestrzeni afinicznej $f(a+tv)=f(a)+tf'(a)v+R(a,tv)$ zatem funkcje są równoważne jeśli mają tę samą pochodną w a. $df(a)$ na przestrzeni afinicznej można więc identyfikować z $f'(a)$:

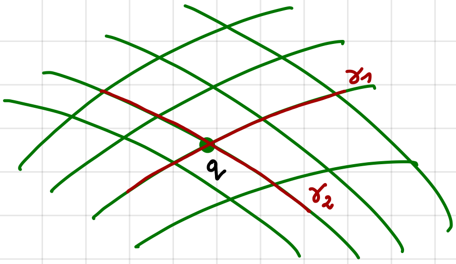
$T^*_aA=X^*$ W szczególności przestrzeń kostyczna w punkcie jest wymiaru n równego wymiarowi przestrzeni afinicznej. o

Wracamy do ogólnej rozmaitości M

STWIERDZENIE: Niech $\varphi=(\varphi^1,\dots,\varphi^n)$ będzie mapą w otoczeniu punktu q. Każdą różniczkę $df(q)$ można jednoznacznie zapisać jako kombinację liniową różniczek funkcji $d\varphi^i(q)$ funkcji tworzących układ współrzędnych.

DOWÓD: Bez straty ogólności możemy przyjąć $\varphi(q)=(0,\dots,0)$
Rozważmy układ n krzywych

$$\gamma_i(t)=\varphi^{-1}(0,\dots,0,\underset{i}{t},0\dots0)$$



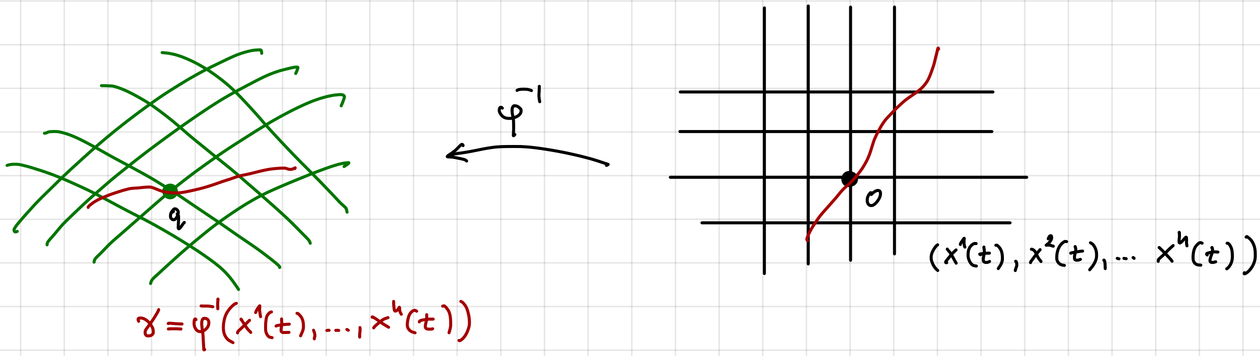
Oznaczmy $\lambda_i = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma_i)(0) = \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial\varphi^1}(0,..,0)$

Potrzebujemy też funkcję

$$\tilde{f}(\ ) = \lambda_1\varphi^1(\ ) + \lambda_2\varphi^2(\ ) + \dots + \lambda_n\varphi^n(\cdot)$$

Pokażemy, że $df(q) = d\tilde{f}(q)$

Jest jasne, że $\frac{d}{dt} f\circ\gamma_i(0) = \lambda_i = \frac{d}{dt}\tilde{f}\circ\gamma_i(0)$. Dla dowolnej krzywej γ przechodzącej przez q też będzie dobrze:



$$\frac{d}{dt} f\circ\gamma(0) = \frac{d}{dt} f\circ\varphi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial\varphi^1}\dot{x}^1(0) + \dots + \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial\varphi^n}\dot{x}^n(0) =$$

$\lambda_1\dot{x}^1(0) + \dots + \lambda_n\dot{x}^n(0) = \frac{d}{dt}\tilde{f}\circ\gamma(0)$ Mamy więc $df(q) = d\tilde{f}(q)$

Ale $d\tilde{f}(q) = \lambda_1 d\varphi^1(q) + \dots + \lambda^n d\varphi^n(q)$

Pokazaliśmy, że każdą różniczkę można zapisać jako kombinację liniową różniczek współrzędnych. Trzeba jeszcze pokazać, że te różniczki są liniowo niezależne.

$\sum_i \alpha_i d\varphi^i = 0 = d\left(\sum_i \alpha_i\varphi^i\right)$ Zerowanie się różniczki oznacza, że $h = \sum_i \alpha_i\varphi^i$ jest równoważna funkcji stałej, zatem dla krzywych γ_i $0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h\circ\gamma^i = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\alpha_i t) = \alpha_i$. Współczynniki więc muszą znikać, zatem $(d\varphi^1(q) \dots d\varphi^n(q))$ tworzą układ liniowo niezależny

$\square$

Podsumujmy informacje o $T^*_q M$:

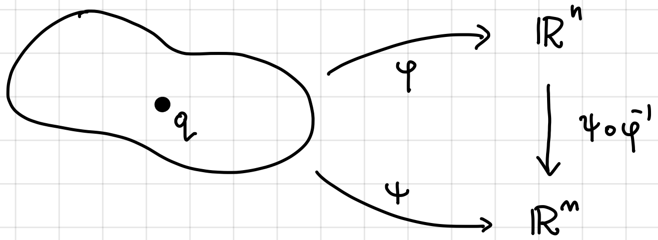
- → Jest to przestrzeń wektorowa wymiaru n równego wymiarowi rozmaitości
- → Każda mapa w otoczeniu q dostarcza bazy przestrzeni kostycznej składającej się z różniczek współrzędnych.
- → Każdą różniczkę $df(q)$ można zapisać w wybranej bazie współrzędnościowej. Współczynniki oznaczamy

$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(q)$ tzn: $df(q) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1}(q)\, d\varphi^1(q) + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}(q)\, d\varphi^n(q)$

W zapisie często opuszczamy odniesienie do konkretnego punktu q pisząc

$$df = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1} d\varphi^1 + \frac{\partial f}{\partial \varphi^2} d\varphi^2 + \dots \frac{\partial f}{\partial \varphi^n} d\varphi^n.$$

→ Warto też znać postać zamiany bazy. Załóżmy, że w otoczeniu q dane są dwa układy współrzędnych φ i ψ



Każdą funkcję ψ^k można zatem rozłożyć w bazie różniczek $d\varphi^i$

$$d\psi^k = \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^1} d\varphi^1 + \dots + \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^n} d\varphi^n$$

Współczynniki $\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i}$ są pochodnymi cząstkowymi odwzorowania zamiany zmiennych. Istotnie, z definicji

$$\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{\psi^k \circ \varphi^{-1}}_{\text{odwzorowanie zamiany zmiennych}} \left(\varphi^1(q), \varphi^2(q), \dots \varphi^i(q)+t, \dots \varphi^n(q)\right)$$

Jeszcze jeden rachunek:

$$\frac{\partial f}{\partial \psi^k} d\psi^k = \frac{\partial f}{\partial \psi^k}\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i} d\varphi^i = \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} d\varphi^i$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial f}{\partial \psi^k}\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi^1} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^1} & \frac{\partial \psi^2}{\partial \varphi^1} & \dots & \frac{\partial \psi^n}{\partial \varphi^1} \\ \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial \psi^2}{\partial \varphi^2} & \dots & \frac{\partial \psi^n}{\partial \varphi^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^n} & \frac{\partial \psi^2}{\partial \varphi^n} & \dots & \frac{\partial \psi^n}{\partial \varphi^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \psi^1} \\ \frac{\partial f}{\partial \psi^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \psi^n} \end{bmatrix}$$

W przypadku $M = A$ otrzymaliśmy $T_a^*A \simeq X^*$ czyli izomorfizm z przestrzenią dualną do przestrzeni wektorowej. X mieliśmy dane jako element struktury A. $(T_a^*A)^* \simeq X$

Czy jesteśmy jakoś w stanie opisać $(T_q^*M)^*$ w ogólnej sytuacji? Na A mieliśmy zestaw wyróżnionych krzywych $t \mapsto a + tv$. W ogólnym przypadku wyróżnionych krzywych nie ma.