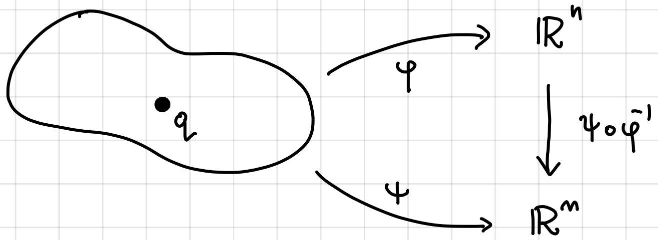
$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(q)$ tzn: $df(q) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1}(q)\, d\varphi^1(q) + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}(q)\, d\varphi^n(q)$

W zapisie często opuszczamy odniesienie do konkretnego punktu q pisząc

$$df = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1} d\varphi^1 + \frac{\partial f}{\partial \varphi^2} d\varphi^2 + \dots \frac{\partial f}{\partial \varphi^n} d\varphi^n.$$

→ Warto też znać postać zamiany bazy. Załóżmy, że w otoczeniu q dane są dwa układy współrzędnych φ i ψ



Każdą funkcję ψ^k można zatem rozłożyć w bazie różniczek $d\varphi^i$

$$d\psi^k = \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^1} d\varphi^1 + \dots + \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^n} d\varphi^n$$

Współczynniki $\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i}$ są pochodnymi cząstkowymi odwzorowania zamiany zmiennych. Istotnie, z definicji

$$\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{\psi^k \circ \varphi^{-1}}_{\text{odwzorowanie zamiany zmiennych}}\left(\varphi^1(q), \varphi^2(q), \dots \varphi^i(q)+t, \dots \varphi^n(q)\right)$$

Jeszcze jeden rachunek:

$$\frac{\partial f}{\partial \psi^k} d\psi^k = \frac{\partial f}{\partial \psi^k}\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i} d\varphi^i = \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} d\varphi^i$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial f}{\partial \psi^k}\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^i}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi^1} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^1} & \frac{\partial \psi^2}{\partial \varphi^1} & \dots & \frac{\partial \psi^n}{\partial \varphi^1} \\ \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial \psi^2}{\partial \varphi^2} & \dots & \frac{\partial \psi^n}{\partial \varphi^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^n} & \frac{\partial \psi^2}{\partial \varphi^n} & \dots & \frac{\partial \psi^n}{\partial \varphi^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \psi^1} \\ \frac{\partial f}{\partial \psi^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \psi^n} \end{bmatrix}$$

W przypadku $M = A$ otrzymaliśmy $T_a^*A \simeq X^*$ czyli izomorfizm z przestrzenią dualną do przestrzeni wektorowej. X mieliśmy dane jako element struktury A. $(T_a^*A)^* \simeq X$

Czy jesteśmy jakoś w stanie opisać $(T_q^*M)^*$ w ogólnej sytuacji? Na A mieliśmy zestaw wyróżnionych krzywych $t \mapsto a + tv$. W ogólnym przypadku wyróżnionych krzywych nie ma.

Można jednak posłużyć się znowu relacją równoważności

DEFINICJA: W zbiorze $C^\infty(I, M)$ wprowadzamy relację równoważności

$$\gamma \sim \gamma' \iff \gamma(q) = \gamma'(q), \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad \frac{d}{dt} f \circ \gamma(0) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma'(0)$$

Klasę równoważności krzywej γ oznaczamy $\dot{\gamma}(0)$, $t\gamma(0)$ lub $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \gamma$ i nazywamy wektorem stycznym do M w punkcie q.
Zbiór wszystkich wektorów stycznych w punkcie q oznaczamy $T_q M$ i nazywamy przestrzenią styczną do M w punkcie q.

Zauważmy, że klasa równoważności $\dot{\gamma}(0)$ definiuje funkcjonał liniowy na przestrzeni $T_q^* M$:

$$\phi_{\dot{\gamma}}(df(q)) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(0)$$

Relacja równoważności była tak wybrana, żeby równoważne krzywe definiowały ten sam funkcjonał. Jeśli krzywe są nierównoważne, to dla przynajmniej dwóch funkcji pochodna złożenia jest inna, zatem funkcjonały są różne. Mamy więc bijekcję

$$T_q M \longrightarrow (T_q^* M)^*$$

Używając tej bijekcji wprowadzamy w $T_q M$ strukturę przestrzeni wektorowej. Układ współrzędnych w otoczeniu q dostarcza wyróżnionych krzywych

$$\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi^1(q), \dots, \varphi^i(q) + t, \dots, \varphi^n(q))$$

Łatwo sprawdzić, że krzywe te są parami nierównoważne obliczając odpowiednie funkcjonały na różniczkach $d\varphi^i(q)$:

$$\phi_{\dot{\gamma}_i(0)}(d\varphi^j(q)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^j(\varphi^{-1}(\varphi^1(q), \dots, \varphi^i(q) + t, \dots, \varphi^n(q))) = \delta^j{}_i$$

Funkcjonały $\phi_{\dot{\gamma}_i(0)}$ tworzą więc bazę dualną w $T_q M$ do bazy $(d\varphi^i(q))$.
Tradycyjnie oznaczamy $\dot{\gamma}_i(0) =: \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ lub ∂_{φ^i} (lub ∂_i)

Skonstruowaliśmy zatem parę dualnych przestrzeni wektorowych $T_q M$ i $T_q^* M$ w każdym punkcie $q \in M$. Układ współrzędnych dostarcza też pary baz dualnych

$$(d\varphi^1, \dots, d\varphi^n) \text{ w } T_q^* M \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}\right) \text{ w } T_q M$$

Do kompletu potrzebujemy jeszcze prawa transformacji bazy i co za tym idzie współrzędnych. Oczywiście wiedząc, że bazy $(d\varphi^i)$ i $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right)$ są dualne łatwo to znajdziemy

Wiemy, że jeśli $\alpha = a_i d\varphi^i = b_j d\psi^j$ to $a_i = \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} b_j$

Dalej wiemy, że

$$v = w^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} = u^j \frac{\partial}{\partial \psi^j} \quad \text{oraz}$$

$$\langle \alpha, v \rangle = a_i w^i = b_j u^j \quad \text{tzn} \quad \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} b_j w^i = b_j u^j$$

Ta równość zachodzi dla dowolnego kowektora α

$$b_j \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} w^i - u^j \right) = 0$$

to znaczy, że dowolne są współrzędne b_j. Zniknięcie całego wyrażenia oznacza więc, że

$$u^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} w^i$$

Zapamiętywanie tego wzoru ułatwia pewna konwencja dotycząca nazewnictwa współrzędnych: Jeśli współrzędne punktu oznaczamy (φ^i) to współrzędne wektora oznaczamy $\dot{\varphi}^i$

$$v = \dot{\varphi}^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} = \dot{\psi}^j \frac{\partial}{\partial \psi^j}$$

$$\dot{\psi}^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} \dot{\varphi}^i$$

Inny sposób wyprowadzania: niech $v = \dot{\gamma}(0)$ dla pewnej krzywej γ. We współrzędnych tę samą krzywą opiszemy na dwa sposoby:

$$\varphi \circ \gamma = (\varphi^1(t) \dots \varphi^n(t))$$

$$\psi \circ \gamma = (\psi^1(t) \dots \psi^n(t)) = (\psi^1(\varphi(t)) \dots \psi^n(\varphi(t)))$$

$$\dot{\psi}^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} \dot{\varphi}^i$$

PRZYKŁAD: Załóżmy, że M jest powierzchnią zanurzoną w $\mathbb{R}^n$ zadaną za pomocą równania dla $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0 \}$$

Żeby M było powierzchnią potrzeba (analiza II) żeby rząd $F'(x)$ był maksymalny w każdym punkcie M

Ustalmy $q \in M$. Oczywiście $q \in \mathbb{R}^n$ i każda krzywa $\gamma: \mathbb{R} \to M$ jest jednocześnie krzywą w $\mathbb{R}^n$: $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$. Warunek że obraz γ jest w M oznacza $F(\gamma(t)) = 0$. Różniczkując po t dostajemy

$$F^1(\gamma(t)) = F^2(\gamma(t)) = \dots = F^k(\gamma(t)) = 0$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial x^1}\dot{x}^1 + \dots + \frac{\partial F^1}{\partial x^n}\dot{x}^n = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial F^k}{\partial x^1}\dot{x}^1 + \dots + \frac{\partial F^k}{\partial x^n}\dot{x}^n = 0 \qquad (*)$$

Wektor $\dot{x}^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \dot{x}^n\frac{\partial}{\partial x^n}$ jest elementem T_qM jeśli $(*)$ są spełnione.
Równania $(*)$ można zapisać:

$$\langle dF^1(q), \dot{\gamma}(0)\rangle = 0 \quad \dots \quad \langle dF^k(q), \dot{\gamma}(0)\rangle = 0.$$

Przestrzeń styczna podrozmaitości zanurzonej jest więc podprzestrzenią wektorową w $T_q\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$. Podprzestrzeń ta zależy od punktu.
Na przykład:

$M = S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \qquad dF = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$

W punkcie $(1,0,0)$ $\quad dF(1,0,0) = 2dx \qquad T_{(1,0,0)}M = \langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\rangle$

W punkcie $(0,1,0)$ $\quad dF(0,1,0) = 2dy$ i $T_{(0,1,0)}M = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\rangle$

$T\mathbb{R}^3 = \underset{\text{punkt zaczepienia}}{\mathbb{R}^3} \times \overset{\text{wektor}}{\mathbb{R}^3}$ $\qquad M \subset \mathbb{R}^3 \qquad TM$ zazwyczaj nie da się zapisać w postaci iloczynu kartezjańskiego.

INNE SPOJRZENIE NA WEKTORY STYCZNE

DEFINICJA Niech A, B będą dwiema algebrami rzeczywistymi, przemiennymi z jedynką i niech $\rho: A \longrightarrow B$ oznacza homomorfizm algebr. Odwzorowanie liniowe $D: A \longrightarrow B$ spełniające warunek

$$D(a_1a_2) = \rho(a_1)D(a_2) + D(a_1)\rho(a_2)$$

nazywamy *różniczkowaniem względem homomorfizmu ρ*.

Różniczkowania już znamy: Na przykład dla $A = C^\infty(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ różniczkowaniem jest operacja

$$f \longmapsto f'(r) \quad \text{dla ustalonego } r \in \mathbb{R}$$

nad homomorfizmem, który jest ewaluacją w punkcie r $\;f \mapsto f(r)$.
Wiadomo bowiem, że

$$(fg)'(r) = f(r)g'(r) + f'(r)g(r)$$

Jeśli zaś rozważymy $A = B = C^\infty(M)$ to branie pochodnej jest różniczkowaniem nad identycznością.

STWIERDZENIE Jeśli $D: A \longrightarrow B$ jest różniczkowaniem nad ρ
$D(1_A) = 0$

DOWÓD: $D(1_A) = D(1_A \cdot 1_A) = \rho(1_A)D(1_A) + D(1_A)\rho(1_A) = 1_B D(1_A) + D(1_A)1_B$

$= 2\cdot D(1_A)$ $\quad D(1_A) = 2D(1_A) \implies D(1_A) = 0.$

W dalszym ciągu przyjmiemy $A = C^\infty(M)$ $B = \mathbb{R}$ $\varrho(f) = f(q)$ dla $q \in M$. Wybierzmy także $v = \dot\gamma(0) \in T_qM$. Wektorowi v można przypisać różniczkowanie

$$D_v(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\gamma$$

Sprawdzenie, że jest to różniczkowanie jest trywialne. Widać też, że równoważne krzywe zadają to samo różniczkowanie, więc D_v rzeczywiście odpowiada v a nie γ. Innymi słowy odwzorowanie

$$T_qM \ni v \longmapsto D_v \in \mathrm{Der}(C^\infty(M), \mathbb{R}) \quad \text{jest dobrze określone}$$

Jest ono też injektywne, co wprost wynika z definicji $\dot\gamma(0)$.
Powstaje teraz naturalne pytanie, czy każdemu różniczkowaniu można przypisać wektor od którego pochodzi? Tzn czy $v \longmapsto D_v$ jest surjektywne? Dla dowodu potrzebujemy lematu:

LEMAT (o funkcjach znikających w punkcie) Niech f będzie gładką funkcją na otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu $0 \in \mathbb{R}^n$. Niech także $f(0) = 0$. Wówczas $f(x) = x^i g_i(x)$ dla pewnych funkcji gładkich g_i.

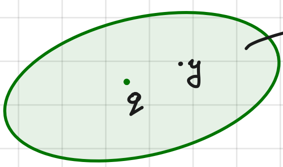
DOWÓD: Ustalmy $x \in \mathcal{O}$ i zdefiniujmy $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $F(t) = f(0 + tx)$. Odcinek I powinien być otwarty i zawierać $[0,1]$. F jest gładka, ponieważ f jest gładka. $F(0) = 0$

$$\underset{\substack{\parallel \\ f(x)}}{F(1)} = \int_0^1 F'(s)\,ds \qquad F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)\,x^i$$

$$f(x) = F(1) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)\,x^i\,ds = x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)\,ds}_{g_i(x)} = x^i g_i(x)$$

g_i są gładkie (korzystamy z twierdzeń o całkach z parametrem na odcinku zwartym.) $\square$

Wracamy do dyskusji różniczkowań $C^\infty(M)$ o wartościach w $\mathbb{R}$ w punkcie q.



$\varphi \longrightarrow (\varphi^1, \dots, \varphi^n) \in \mathbb{R}^n$

$\varphi(q) = 0$

Korzystając z lematu możemy zapisać funkcję f w otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu q we współrzędnych wzorem

$$f(y) = f(q) + \varphi^i(y)\,g_i(y) \qquad y \in \mathcal{O}$$

Weźmy dowolne różniczkowanie D:

$$D(f) = D(f(q) + \varphi^i g_i) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{D(f(q))} + D(\varphi^i g_i) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\varphi^i(q)} D(g_i) + D(\varphi^i)\,g_i(q)$$

$$D(f) = D(\varphi^i)\, g_i(q)$$

Widać, że wartość $D(f)$ zależy od $D(\varphi^i)$ (i oczywiście od g_i, ale te funkcje wyznaczamy z f bez udziału D). Ważne są więc tylko liczby $d^i = D(\varphi^i)$ które jednoznacznie wyznaczają różniczkowanie. Weźmy więc teraz krzywą

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(d^1 t, d^2 t, \dots, d^n t)$$

i sprawdźmy jak działa $D_{\dot\gamma(0)}$:

$$D_{\dot\gamma(0)}(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\gamma =$$

bierzemy f w postaci $f = f(q) + \varphi^i g_i$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(f(q) + d^i t\, g_i(\varphi^{-1}(\dots))\right) = d^i g_i(q)$$

to samo!

Znaleźliśmy zatem krzywą, a więc i wektor styczny, które produkuje D. Odwzorowanie $v \longmapsto D_v$ jest surjekcją. Wcześniej wiedzieliśmy już że jest injekcją. W ten sposób znaleźliśmy bijekcję między T_qM a $\mathrm{Der}_q(C^\infty(M), \mathbb{R})$. Łatwo sprawdzić, że ta bijekcja jest liniowa. Obie przestrzenie są więc kanonicznie izomorficzne. Można definiować wektory styczne jako różniczkowania algebry funkcji gładkich. Symbol $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}$ nabiera więc głębszego sensu.

Z punktu widzenia fizyki definicja przez klasy równoważności krzywych jest bardziej naturalna. Wektory styczne reprezentują obiekty typu prędkość, przesunięcie wirtualne ... które wprost pochodzą od krzywych.