

WIĄZKA WEKTOROWA

TM i T^*M mają specyficzną strukturę: Wyposażone są w odwzorowanie $\pi_M: T^*M \rightarrow M$ i $\tau_M: T^*M \rightarrow M$ takie, że przeciwobrazy ustalonych punktów: $T_x M = \tau_M^{-1}(x)$; $T_x^* M = \pi_M^{-1}(x)$ są przestrzeniami wektorowymi. TM i T^*M są przykładami wezłów, co nazywa się w geometrii **wiązką wektorową**.

DEFINICJA: Wiązkę wektorową nazywamy trójką $E = (E, M, \rho)$ gdzie E jest rozmaitością wymiaru $m+n$, M jest rozmaitością wymiaru m zaś $\rho: E \rightarrow M$ jest surjektywną submersją. Dodatkowo dla danego $x \in M$ istnieje otoczenie \mathcal{D} i dyfeomorfizm $\varphi: \rho^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow O \times \mathbb{R}^n$ spełniający warunek:

$$\begin{array}{ccc} \rho^{-1}(U) \cap \rho^{-1}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\varphi} & O \cap U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \psi & \downarrow \psi \circ \varphi^{-1} \\ & & O \cap U \times \mathbb{R}^n \end{array} \quad \psi \circ \varphi^{-1}(x, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Innymi słowy na E istnieje wyróżniony atlas taki, że współrzędne dzielą się na współrzędne na M i współrzędne we włóknie. Te we włóknie są liniowe. W wiązce stycznej wprowadziliśmy współrzędne postępujące się współrzędnymi na bazie:

$TM \ni v \mapsto (\varphi^i(\tau_M(v)), \dot{\varphi}^j(v))$. Kropkowane współrzędne są liniowe, tzn. zamiana współrzędnych

$$\dot{\varphi}^j = \frac{\partial \varphi^j}{\partial \varphi^i} \dot{\varphi}^i \quad \text{jest odwzorowaniem liniowym.}$$

$T^*M \ni \alpha \mapsto (\varphi^i(\pi_M(\alpha)), p_j(\alpha))$

$$p_j = \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi^j} r_i \quad \text{jeśli } (\varphi^i, r_k) \text{ to współrzędne związane z } \varphi \text{ na bazie.}$$

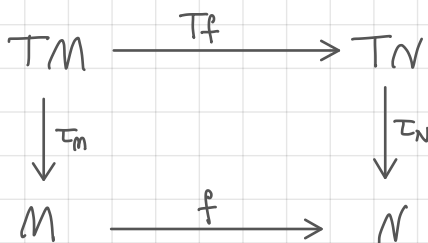
Wiązki styczna i kostyczna są wiązkami wektorowymi.

Submersje pojawiają się w definicji wiązki wektorowej oraz odwzorowanie maksymalnego rzędu: Niech $M \xrightarrow{f} N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Odwzorowaniem stycznym $Tf: TM \rightarrow TN$ nazywamy odwzorowanie dane wzorem

$$Tf(\dot{\gamma}(0)) = \dot{t}(f \circ \gamma)(0)$$

Odwzorowanie to jest punkt po punkcie liniowe, tzn. $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ jest liniowe. Jeśli $\dim M \geq \dim N$ i Tf jest maksymalnego rzędu (równego $\dim N$) w każdym punkcie to f nazywamy submersją. Postępujemy się twierdzeniem o maksymalnym rzędzie. Łatwo stwierdzić że zbiór $f^{-1}(y)$ $y \in N$ jest podrozmiernością w M .

Diagram



jest przemienny, tzn
 $\tau_N \circ Tf = f \circ \tau_M$

Jeśli (x^i) to współrzędne w M a (y^a) to współrzędne w N to

$$Tf(x^i, \dot{x}^i) = (f^a(x), \frac{\partial f^a}{\partial x^i}(x) \dot{x}^i)$$

Mogłoby się wydawać, że istnieje także stosowne odwzorowanie między wiązkami stycznej. Tak jednak nie jest! Na pierwszy rzut oka algebraiczny fakt:

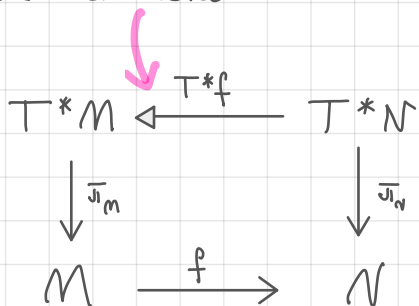
$$F: V \rightarrow W$$

$$F^*: V^* \leftarrow W^*$$

odwzorowanie dualne jest "w drugą stronę".
 Możemy oczywiście wiązkę odwzorowania dualnego do każdego z odwzorowań

$$T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N \quad \text{dostając} \quad T_{f(x)}^* N \rightarrow T_x^* M$$

ale jeśli f nie jest odwracalne, to kolejną taką odwzorowań nie jest odwzorowaniem a jedyną relacją. Zauważmy to niejedynemu rodzajowi strzałki



Relacja tego typu nazywa się czasem morfizmem zaknewskiego.

DEFINICJA: Niech $\rho: E \rightarrow M$ będzie wiązką wektorową. Odwzorowanie gładkie $\nu: M \rightarrow E$ takie, że $\rho \circ \nu = \text{id}_M$ nazywamy gładkim cięciem wiązki E . Gładkie cięcia wiązki stycznej to pola wektorowe, gładkie cięcia wiązki stycznej to **jednoformy różniczkowe**.

DO CZEGO SŁUŻĄ, JEDNOFORMY RÓŻNICZKOWE

Jednoforma różniczkowa jest to odwzorowanie $M \xrightarrow{\alpha} T^*M$ takie, że $\tau_M^* \circ \alpha = \text{id}_M$. Przykładem jednoformy jest różniczka funkcji

$$f \in C^\infty(M) \quad df: M \rightarrow T^*M \quad x \mapsto df(x)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

W szczególności jednoformami są bazowe cięcia dx^i - różniczki funkcji współrzędnościowych. Oczywiście nie wszystkie formy są

różniczkami funkcji, w niepełności $M = \mathbb{R}^2$ $\alpha = xdy - ydx$ nie jest różniczką funkcji, gdyż gdyby $\alpha = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ to $\frac{\partial f}{\partial x} = -y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ i pochodne mieszane powinny być równe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} x = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-y) = -1$$

Rozważmy teraz jednoformę $\alpha: M \rightarrow T^*M$ daną w dwóch różnych układach współrzędnych (x^i) i (y^j)

$$\alpha = f_i(x) dx^i = g_j(y) dy^j$$

Weźmy też krzywą $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ taką, żeby $\gamma(I)$ było zawarte w dziedzinie obu układów współrzędnych. Wtedy możemy

$$I \ni t \mapsto x^i(\gamma(t)) \quad ; \quad I \ni t \mapsto y^j(\gamma(t)) \quad \text{Niech } [a, b] \subset I$$

Obliczamy: $\int_a^b f_i(x(t)) \dot{x}^i(t) dt$ i $\int_a^b g_j(y(\gamma(t))) \dot{y}^j(t) dt$
współrzędne wektora stycznego $\dot{\gamma}(t)$

Korzystając z równości sumujemy mamy:

$$y^j(\gamma(t)) = y^j(x(\gamma(t)))$$

$$\dot{y}^j(\gamma(t)) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \dot{x}^i(\gamma(t))$$

$$\begin{aligned} \int_a^b g_j(y(\gamma(t))) \dot{y}^j(\gamma(t)) dt &= \int_a^b \underbrace{g_j(y(x(\gamma(t))))}_{f_i(\gamma(t))} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \dot{x}^i(\gamma(t)) dt = \\ &= \int_a^b f_i(\gamma(t)) \dot{x}^i(\gamma(t)) dt. \end{aligned}$$

Wynek rachunku nie zależy od użytych współrzędnych. Dodatkowo zrobimy drugi rachunek: Niech $\eta: I \rightarrow M$ będzie inną parametryzacją tej samej krzywej γ .

$$\gamma(t) = \eta(s(t)) \quad s(a) = c \quad s(b) = d$$

Porównajmy $\int_a^b f_i(\gamma(t)) \dot{x}^i(\gamma(t)) dt$ z

$$\int_c^d f_i(\eta(s)) \dot{x}^i(\eta(s)) ds$$

$$\int_c^d f_i(\eta(s)) \dot{x}^i(\eta(s)) ds = \int_a^b \underbrace{f_i(\eta(s(t)))}_{f_i(\gamma(t))} \dot{x}^i(\eta(s)) \frac{ds}{dt} dt =$$

wektory styczne do $s \rightarrow \eta(s)$ i $t \rightarrow \gamma(t)$ różnią się o mnożenie przez liczbę:

$$\dot{\eta}(s) = \underbrace{\frac{d}{ds} x^i(\eta(s)) \frac{\partial}{\partial x^i}}_{\dot{x}^i(\eta(s))} \quad \dot{\gamma}(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} x^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}}_{\dot{x}^i(\gamma(t))}$$

$$x^i(\eta(s)) = x^i(\eta(s(t))) = x^i(\gamma(t))$$

$$\frac{d}{dt} x^i(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} x^i(\eta(s(t))) = \frac{d}{ds} x^i(\eta(s)) \frac{ds}{dt}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\eta}(s(t)) \frac{ds}{dt}$$

$$\dot{x}^i(\gamma(t)) = \dot{x}^i(\eta(s(t))) \frac{ds}{dt}$$

$$\int_a^b f_i(\gamma(t)) \dot{x}^i(\gamma(t)) dt$$

a

Wyrażenie nie zależy też od parametryzacji krzywej.

W tej sytuacji możemy zdefiniować $\int_{\gamma} \alpha$ wzorem

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \langle \alpha(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \quad \text{cykli jednoformna służy do całkowania po niesparametryzowanej krzywej}$$

Niesparametryzowane krzywe to inaczej jednozmiennowe podzbiory \mathbb{R}^n . Tutaj używaliśmy dwóch parametryzacji z dodatkową podsekcją w jednej wyliczając nie jest to takie ważne bo do wzoru na zamianę zmiennych wchodzi $\frac{ds}{dt}$ więc znak może być większy. W wielu wypadkach mamy model gąsienicowy we wzorze na zamianę zmiennych — bierzemy wyrażać orientacji. Ostatecznie jednoformna służy do całkowania po jednozmiennych podzbiórach \mathbb{R}^n .

PULL-BACK FORMY

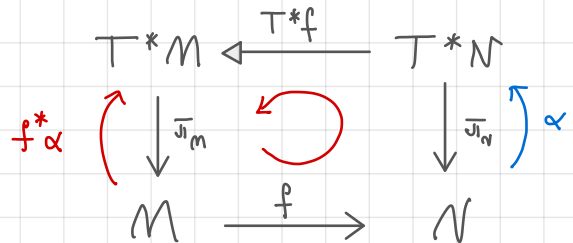
DEFINICJA: Niech $f: M \rightarrow N$ będzie gładkim odwzorowaniem a α formą na N . Formę $f^*\alpha$ na M definiujemy wzorem

$$\langle (f^*\alpha)(x), v_x \rangle = \langle \alpha(f(x)), T_x f(v_x) \rangle$$

Mozemy też napisać

$$(f^*\alpha)(x) = (T_x f)^*(\alpha(f(x)))$$

Formę $f^*\alpha$ nazywamy **cofuzją** albo **pull-back'iem** formy α względem odwzorowania f .



UWAGA: GIMNASTYKA INTELEKTUALNA DLA AMBITNYCH

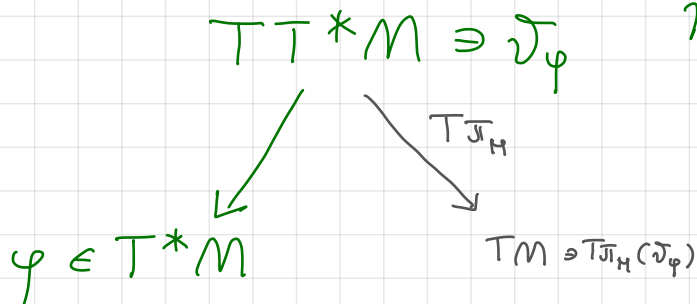
Wizyka kostyczna wyposażona jest w pewną kanoniczną jednoformę θ_M zwaną formą Liouville'a. Jest to jednoforma na T^*M czyli cięcie wizyki

$$T^*T^*M \xrightarrow{\theta_M} T^*M$$

Jak ta forma działa? Znamy formę, jeśli wiemy jak działa na wektory w każdym punkcie. Weźmy więc $\varphi \in T^*M$ i dowolny element $v_\varphi \in T_\varphi T^*M$. Musimy zdefiniować

$$\langle \theta_M(\varphi), v_\varphi \rangle$$

Jeżeli φ jest kowektorem na M zacięzionym w $q \in M$ to $T_{J_M}(v_\varphi)$ jest wektorem zacięzionym w x



$$\varphi \in T_q^*M, T_{J_M}(v_\varphi) \in T_q M$$

można je na sobie obliczyć!

$$T \left(\begin{array}{c} T^*M \\ \downarrow J_M \\ M \end{array} \right) = \begin{array}{c} T(T^*M) \\ \downarrow T_{J_M} \\ T(M) \end{array}$$

$$\langle \theta_M(\varphi), v_\varphi \rangle := \langle \varphi, T_{J_M}(v_\varphi) \rangle$$

jak ta forma wygląda we współrzędnych? Jak wiadomo współrzędne w T^*M pochodzą od współrzędnych w M . Określony jest (x^i, p_i) gdzie (x^i) są "na bieżąco" a p_i są takie, że

$$p_i(df(q)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) \quad x^j(df(q)) = x^j(q)$$

Forma na T^*M powinna mieć ogólną postać

$$a_j(x, p) dx^j + b^i(x, p) dp_i$$

wtedy na wektorze $v = \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ linijnie jako

$$\langle a_j dx^j + b^i dp_i, \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \rangle = a_j \dot{x}^j + b^i \dot{p}_i$$

Wektor $v_\varphi = \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ zaczepiony jest w punkcie $\varphi = p_i dx^i \in T^*M$ i łączy się na $\dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in TM$ przy pomocy odwzorowania $T\pi_M$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_M(\varphi), v_\varphi \rangle &= \langle \varphi, T\pi_M(v_\varphi) \rangle = \langle p_i dx^i, \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = p_i \dot{x}^i = \\ &= a_j \dot{x}^j + b^i \dot{p}_i \Rightarrow a_j = p_j \quad b^i = 0 \end{aligned}$$

$$\theta_M(\varphi) = p_i dx^i \quad \text{dla} \quad \varphi = p_i dx^i \in T^*M$$

$$\theta_M(\varphi) = p_i dx^i + 0 \cdot dp_i$$

wygląda tak samo
ale to nie to samo!

DO CZEGO SŁUŻY POLE WEKTOROWE?

Pole wektorowe jest gładkim cieniem wiązki stycznej.

$$X: M \rightarrow TM \quad \tau_M \circ X = \text{id}_M$$

$$X(q) = X^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{w bazie współrzędnościowej.}$$

Lokalnie określone $\frac{\partial}{\partial x^i}$ są oczywiście przykładowe pola wektorowe.

Jako przykład pola wektorowego posłużymy nam gradient funkcji:

Niech M będzie rozmaitością wyposażoną w metrykę, tzn. na każdej przestrzeni $T_q M$ istnieje iloczyn skalarny (dualizacja