WIĄZKA WEKTOROWA

TM i T*M mają specyficzną strukturę: Wyposażone są w odwzorowanie $\pi_M : T^*M \longrightarrow M$ i $\tau_M : T^*M \longrightarrow M$ takie, że przeciwobrazy ustalonych punktów: $T_xM = \tau_M^{-1}(x)$ i $T^*_xM = \pi_M^{-1}(x)$ są przestrzeniami wektorowymi. TM i T*M są przykładami czegoś, co nazywa się w geometrii wiązką wektorową

DEFINICJA: Wiązką wektorową nazywamy trójkę $E=(E, M, \rho)$ gdzie E jest rozmaitością wymiaru $m+n$, M jest rozmaitością wymiaru n zaś $\rho : E \longrightarrow M$ jest surjektywną submersją. Dodatkowo dla dowolnego $x \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ i dyfeomorfizm $\varphi : \rho^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$ spełniający warunek:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O} \cap \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\psi \circ \varphi^{-1}"] \\
\rho^{-1}(\mathcal{U}) \cap \rho^{-1}(\mathcal{O}) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & \mathcal{O} \cap \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

$\psi \circ \varphi^{-1}(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem liniowym.

Innymi słowy na E istnieje wyróżniony atlas taki, że współrzędne dzielą się na współrzędne na M i współrzędne we włóknie. Te we włóknie są liniowe. W wiązce stycznej wprowadziliśmy współrzędne posługując się współrzędnymi na bazie:

$TM \ni v \longmapsto (\varphi^i(\tau_M(v)), \dot\varphi^j(v))$. Kropkowane współrzędne są liniowe, tzn zamiana współrzędnych

$$\dot\psi^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} \dot\varphi^i$$ jest odwzorowaniem liniowym.

$T^*M \ni \alpha \longmapsto (\varphi^i(\pi_M(\alpha)), p_j(\alpha))$

$$p_j = \frac{\partial \psi^i}{\partial \varphi^j} r_i$$ jeśli (ψ^j, r_k) to współrzędne związane z ψ na bazie.

Wiązki styczna i kostyczna są wiązkami wektorowymi.

Submersje pojawiające się w definicji wiązki wektorowej oznacza odwzorowanie maksymalnego rzędu: Niech $M \xrightarrow{f} N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Odwzorowaniem stycznym $Tf : TM \longrightarrow TN$ nazywamy odwzorowanie dane wzorem

$$Tf(\gamma(0)) = t(f \circ \gamma)(0)$$

Odwzorowanie to jest punkt po punkcie liniowe, tzn $T_xf : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ jest liniowe. Jeśli $\dim M \geq \dim N$ i T_xf jest maksymalnego rzędu (równego $\dim N$) w każdym punkcie to f nazywamy submersją. Posługując się twierdzeniem o maksymalnym rzędzie łatwo stwierdzić że zbiór $f^{-1}(y)$ $y \in N$ jest podrozmaitością w M.

Diagram

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\tau_M"] & TN \arrow[d, "\tau_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

jest przemienny, tzn $\tau_N \circ Tf = f \circ \tau_M$

Jeśli (x^i) to współrzędne w M a (y^A) to współrzędne w N to

$$Tf(x^i, \dot{x}^j) = \left(f^A(x), \frac{\partial f^A}{\partial x^j}(x)\, \dot{x}^j \right)$$

Mogłoby się wydawać, że istnieje także stosowne odwzorowanie między wiązkami kostycznymi. Tak jednak nie jest! Na przeszkodzie stoi algebraiczny fakt:

$$F : V \longrightarrow W$$

$$F^* : V^* \longleftarrow W^*$$

odwzorowanie dualne jest „w drugą stronę"!

Możemy oczywiście wziąć odwzorowanie dualne do każdego z odwzorowań

$$T_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N \quad \text{dostając} \quad T^*_{f(x)} N \longrightarrow T^*_x M$$

ale jeśli f nie jest odwracalne, to kolekcja takich odwzorowań nie jest odwzorowaniem a jedynie relacją. Zaznaczamy to szczególnym rodzajem strzałki

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[d, "\pi_M"] & T^*N \arrow[l, "T^*f"', triangle] \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Relacja tego typu nazywa się czasami morfizmem Zakrzewskiego.

DEFINICJA: Niech $\rho : E \to M$ będzie wiązką wektorową. Odwzorowanie gładkie $\sigma : M \to E$ takie, że $\rho \circ \sigma = id_M$ nazywamy gładkim cięciem wiązki E. Gładkie cięcia wiązki stycznej to pola wektorowe, gładkie cięcia wiązki kostycznej to jednoformy różniczkowe.

DO CZEGO SŁUŻĄ JEDNOFORMY RÓŻNICZKOWE

Jednoforma różniczkowa jest to odwzorowanie $M \xrightarrow{\alpha} T^*M$ takie, że $\pi_M \circ \alpha = id_M$. Przykładem jednoformy jest różniczka funkcji

$$f \in C^\infty(M) \qquad df : M \longrightarrow T^*M \qquad x \longmapsto df(x)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

W szczególności jednoformami są bazowe cięcia dx^i – różniczki funkcji współrzędnościowych. Oczywiście nie wszystkie formy są różniczkami funkcji, w szczególności $M=\mathbb{R}^2$ $\alpha = x\,dy - y\,dx$ nie jest różniczką funkcji, gdyż gdyby $\alpha = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ to $\frac{\partial f}{\partial x} = -y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ i pochodne mieszane powinny być równe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}x = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$$

Rozważmy teraz jednoformę $\alpha: M \longrightarrow T^*M$ daną w dwóch różnych układach współrzędnych (x^i) i (y^j)

$$\alpha = f_i(x)\,dx^i = g_j(y)\,dy^j$$

Weźmy też krzywą $\gamma: \mathbb{R} \supset I \longrightarrow M$ taką, żeby $\gamma(I)$ było zawarte w dziedzinie obu układów współrzędnych. Wtedy mamy

$$I \ni t \longmapsto x^i(\gamma(t)) \quad \text{i} \quad I \ni t \longmapsto y^j(\gamma(s)) \qquad \text{Niech } [a,b] \subset I$$

Obliczamy: $\int_a^b f_i(x(t))\,\dot{x}^i(\dot{\gamma}(t))\,dt$ i $\int_a^b g_j(y(\gamma(t)))\,\dot{y}^j(\dot{\gamma}(t))\,dt$

współrzędne wektora stycznego $\dot{\gamma}(t)$

Korzystając z zamiany zmiennych mamy:

$$y^j(\gamma(t)) = y^j(x(\gamma(t)))$$

$$\dot{y}^j(\dot{\gamma}(t)) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\dot{x}^i(\dot{\gamma}(t))$$

$$\int_a^b g_j(y(\gamma(t)))\,\dot{y}^j(\dot{\gamma}(t))\,dt = \int_a^b \underbrace{g_j(y(x(\gamma(t))))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}}_{f_i(\gamma(t))}\,\dot{x}^i(\dot{\gamma}(t))\,dt = \int_a^b f_i(\gamma(t))\,\dot{x}^i(\dot{\gamma}(t))\,dt.$$

Wynik rachunku nie zależy od użytych współrzędnych. Dodatkowo zróbmy drugi rachunek: Niech $\eta: I \longrightarrow M$ będzie inną parametryzacją tej samej krzywej tzn

$$\gamma(t) = \eta(s(t)) \qquad s(a) = c \qquad s(b) = d$$

Porównajmy $\int_a^b f_i(\gamma(t))\,\dot{x}(\dot{\gamma}(t))\,dt$ z

$$\int_c^d f_i(\eta(s))\, \dot{x}^i(\dot\eta(s))\, ds$$

$$\int_c^d f_i(\eta(s))\, \dot{x}^i(\dot\eta(s))\, ds = \int_a^b \underbrace{f_i(\eta(s(t)))}_{f_i(\gamma(t))}\, \dot{x}^i(\dot\eta(s))\frac{ds}{dt}\, dt =$$

wektory styczne do $s \longmapsto \eta(s)$ i $t \longrightarrow \gamma(t)$ różnią się o mnożenie przez liczbę:

$$\dot\eta(s) = \underbrace{\frac{d}{ds} x^i(\eta(s))}_{\dot{x}^i(\dot\eta(s))} \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \dot\gamma(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} x^i(\gamma(t))}_{\dot{x}^i(\gamma(t))} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$x^i(\eta(s)) = x^i(\eta(s(t))) = x^i(\gamma(t))$$

$$\frac{d}{dt} x^i(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} x^i(\eta(s(t))) = \frac{d}{ds} x^i(\eta(s))\frac{ds}{dt}$$

$$\dot\gamma(t) = \dot\eta(s(t))\frac{ds}{dt}$$

$$\dot{x}^i(\dot\gamma(t)) = \dot{x}^i(\dot\eta(s(t)))\frac{ds}{dt}$$

$$\int_a^b f_i(\gamma(t))\, \dot{x}^i(\gamma(t))\, dt$$

Wyrażenie nie zależy też od parametryzacji krzywej.

W tej sytuacji możemy zdefiniować $\int_\gamma \alpha$ wzorem

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \langle \alpha(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\, dt$$

czyli jednoforma służy do całkowania po niesparametryzowanych krzywych

Niesparametryzowane krzywe to inaczej jednowymiarowe podrozmaitości. Tutaj używaliśmy dwóch parametryzacji z dodatnią pochodną w jednym wyliczeniu nie jest to takie ważne bo do wzoru na zamianę zmiennych wchodzi $\frac{ds}{dt}$ więc znak może być ujemny. W wielu wyliczeniach mamy moduł jakobianu we wzorze na zamianę zmiennych — będziemy wymagać orientacji. Ostatecznie jednoforma służy do całkowania po jednowymiarowych rozmaitościach zorientowanych.

PULL-BACK FORMY

DEFINICJA: Niech $f: M \longrightarrow N$ będzie gładkim odwzorowaniem a α formą na N. Formę $f^*\alpha$ na M definiujemy wzorem

$$\langle (f^*\alpha)(\overset{x\in M}{x}),\ v_x \rangle = \langle \alpha(f(x)),\ Tf(v_x) \rangle$$

Możemy też napisać

$$(f^*\alpha)(x) = (T_x f)^*(\alpha(f(x)))$$

Formę $f^*\alpha$ nazywamy *cofnięciem* albo *pull-back'iem* formy α względem odwzorowania f.

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[d, "\pi_M"'] & T^*N \arrow[l, "T^*f"'] \arrow[d, "\pi_N"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ M \arrow[r, "f"] \arrow[u, bend left, "f^*\alpha"] & N \arrow[u, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

UWAGA: GIMNASTYKA INTELEKTUALNA DLA AMBITNYCH

Wiązka kostyczna wyposażona jest w pewną kanoniczną jednoformę θ_M zwaną formą Liouville'a. Jest to jednoforma na T^*M czyli cięcie wiązki

$$\begin{tikzcd} T^*T^*M \arrow[r] & T^*M \arrow[l, bend left, "\theta_M"] \end{tikzcd}$$

Jak ta forma działa? Znamy formę, jeśli wiemy jak działa na wektory w każdym punkcie. Weźmy więc $\varphi \in T^*M$ i dowolny element $v_\varphi \in T_\varphi T^*M$. Musimy zdefiniować

$$\langle \theta_M(\varphi),\ v_\varphi \rangle$$

Jeżeli φ jest kowektorem na M zaczepionym w $q \in M$ to $T\pi_M(v_\varphi)$ jest wektorem zaczepionym w x

$$\varphi \in T_q^*M, \quad T\pi_M(v_\varphi) \in T_q M$$

można je na sobie obliczyć!

$$\begin{tikzcd} & TT^*M \ni v_\varphi \arrow[dl] \arrow[dr, "T\pi_M"] & \\ \varphi \in T^*M & & TM \ni T\pi_M(v_\varphi) \end{tikzcd}$$

$$T\left(\begin{tikzcd} T^*M \arrow[d, "\pi_M"] \\ M \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} TT^*M \arrow[d, "T\pi_M"] \\ TM \end{tikzcd}$$

$$\langle \theta_M(\varphi),\ v_\varphi \rangle := \langle \varphi,\ T\pi_M(v_\varphi) \rangle$$

jak ta forma wygląda we współrzędnych? Jak wiadomo współrzędne w T^*M pochodzą od współrzędnych w M. Oznaczamy je (x^i, p_i) gdzie (x^i) są „na bazie" a p_j są takie, że

$$p_j(df(q)) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(q) \qquad x^j(df(q)) = x^j(q)$$

Forma na T^*M powinna mieć ogólną postać

$$a_j(x,p)dx^j + b^i(x,p)dp_i$$

wtedy na wektorze $v = \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p^i}$ liczy się jako

$$\langle a_j dx^j + b^i dp_i, \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p^i} \rangle = a_j \dot{x}^j + b^i \dot{p}_i$$

Wektor $v_\varphi = \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p^i}$ zaczepiony jest w punkcie $\varphi = p_i dx^i \in T^*M$ i rzutuje się na $\dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in TM$ przy pomocy odwzorowania $T\pi_M$

Mamy więc:

$$\langle \vartheta_M(\varphi), v_\varphi \rangle = \langle \varphi, T\pi_M(v_\varphi) \rangle = \langle p_i dx^i, \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = p_i \dot{x}^i =$$

$$= a_j \dot{x}^j + b^i \dot{p}_i \implies a_j = p_j \qquad b^i = 0$$

$$\underset{\substack{\cap \\ TT^*M}}{\vartheta_M(\varphi) = p_j dx^j} \qquad \text{dla} \qquad \varphi = p_j dx^j \in T^*M$$

wygląda tak samo
ale to nie to samo!

$$\vartheta_M(\varphi) = p_j dx^j + 0 \cdot dp_i$$

DO CZEGO SŁUŻY POLE WEKTOROWE?

Pole wektorowe jest gładkim cięciem wiązki stycznej.

$$X : M \longrightarrow TM \qquad \tau_M \circ X = id_M$$

$$X(q) = X^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{w bazie współrzędnościowej.}$$

Lokalnie określone $\frac{\partial}{\partial x^i}$ są oczywiście przykładami pól wektorowych.

Jako przykład pola wektorowego posłuży nam gradient funkcji:

Niech M będzie rozmaitością wyposażoną w metrykę, tzn na każdej przestrzeni T_qM istnieje iloczyn skalarny (dwuliniowa