Rys. 22: Karol Borsuk.

Każda wiązka wektorowa ma przynajmniej jedno cięcie globalne przyporządkowujące każdemu punktowi na bazie odpowiedni wektor zerowy we włóknie. Gładkie cięcia wiązki stycznej nazywamy gładkimi *polami wektorowymi* zaś cięcia wiązki kostycznej gładkimi *jednoformami*. Pole wektorowe we współrzędnych jest postaci:

$$X = X^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x)\frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + X^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}$$

zaś jednoforma

$$\alpha = \alpha_1(x)\mathsf{d}x^1 + \alpha_2(x)\mathsf{d}x^2 + \cdots + \alpha_n(x)\mathsf{d}x^n,$$

gdzie X^i i α_j są gładkimi funkcjami.

Przykładem jednoformy jest różniczka funkcji (tzn. przyporządkowanie punktowi różniczki funkcji w tym punkcie). Nie wszystkie jednak formy są tego rodzaju. Na $\mathbb{R}^2$ np łatwo wskazać (korzystając z globalnego układu współrzędnych (x, y)) formę $\alpha = x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x$, która nie jest różniczką funkcji. Gdyby tak było, tzn gdyby $\alpha = \mathsf{d}g$, to

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \text{ale wtedy} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Przykładem pola wektorowego jest znany pewnie wszystkim *gradient funkcji*. Załóżmy, że każda z przestrzeni T_qM wyposażona jest w iloczyn skalarny, którego zależność od punktu q jest gładka. Taka sytuacja ma miejsce na przykład, gdy M jest zanurzona w $\mathbb{R}^n$ – możemy wówczas obciąć kanoniczny iloczyn skalarny z $\mathbb{R}^n$ do podprzestrzeni w każdym punkcie powierzchni. Iloczyn skalarny zadaje, jak wiadomo, izomorfizm między przestrzenią wektorową a dualną do niej:

$$G : V \ni v \longmapsto (v|\cdot) \in V^*.$$

Na rozmaitości odwzorowanie $G : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}^*M$ jest izomorfizmem wiązek wektorowych nad identycznością w M, tzn diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}M \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\tau_M"'] & \mathsf{T}^*M \arrow[d, "\pi_M"] \\ M \arrow[r, "id_M"] & M \end{tikzcd}$$

jest przemienny, a G obcięte do każdego włókna jest liniowym izomorfizmem.

Definicja 15 Niech f będzie funkcją na M, wówczas

$$(\mathrm{grad}\, f)(q) = G^{-1}(\mathsf{d}f(q)).$$

Oczywiście na $M = \mathbb{R}^n$, gdzie baza kanoniczna jest ortonormalna względem iloczynu skalarnego, jako wyrażenie gradientu we współrzędnych otrzymujemy znany wzór

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Wiadomo jednak, że użycie krzywoliniowego układu współrzędnych istotnie zmienia postać wzoru. Znajomość definicji gradientu (a nie tylko wyrażenia we współrzędnych kartezjańskich) znacznie ułatwia rachunki w różnych układach współrzędnych, także na $\mathbb{R}^n$.

Innym przykładem pola wektorowego jest tzw. *pole Eulera* na wiązce wektorowej. Niech $\rho : E \to M$ będzie wiązką wektorową. Przestrzeń $\mathsf{T}E$ styczna do E zawiera szczególne wektory, które nazywamy *pionowymi* względem ρ. Wektor $v \in \mathsf{T}E$ jest pionowy, jeśli $\mathsf{T}\rho(v) = 0 \in \mathsf{T}M$. Przestrzeń składającą się z wektorów pionowych oznaczamy zazwyczaj $\mathsf{V}E$. Jest to podwiązka wiązki stycznej $\mathsf{T}E$, co oznacza, że $\mathsf{V}E$ jest podrozmaitością w $\mathsf{T}E$ i sama też jest wiązką wektorową nad E. Suma wektorów pionowych jest pionowa, podobnie wektor pionowy pomnożony przez liczbę jest pionowy. Wektory pionowe są styczne do włókien wiązki E, zatem styczne do przestrzeni wektorowych, którymi są te włókna. Każda przestrzeń $\mathsf{V}_e E$ jest więc identyczna z $E_{\rho(e)}$. Wartością pola Eulera w punkcie e jest ten sam wektor e (ale traktowany jako pionowy wektor styczny). Inaczej mówiąc Wartością pola Eulera w punkcie $e \in E_q$ jest wektor styczny do krzywej $t \mapsto e + te$. pole to oznaczane jest ∇_E i jest elementem struktury każdej wiązki wektorowej. Jeśli (x^i, y^a) jest układem współrzędnych na wiązce E zgodnym ze strukturą, tzn (y^i) są liniowymi współrzędnymi w każdym włóknie, to pole Eulera ma postać

$$\nabla_E(e) = y^a(e)\frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Przykład 13 Rozważmy pole wektorowe X na S^2 dane we współrzędnych stereograficznych (względem bieguna północnego) wzorem

$$X = (x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pole zdefiniowane we współrzędnych stereograficznych zadane jest jedynie na obszarze będącym dziedziną tego układu wspołrzędnych. Czy da się to pole rozszerzyć na całą sferę, tzn dodefiniować w biegunie północnym tak, żeby całość była polem gładkim? Żeby to sprawdzić, dokonajmy zamiany zmiennych w polu X na współrzędne sferyczne względem bieguna południowego. Nowe współrzędne to

$$a = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Zapisujemy transformację wektorów bazowych

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial}{\partial b} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial b},$$

podobnie

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial}{\partial b} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{y^2+x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial b}.$$

Podstawiamy uzyskany wynik do wzoru definiującego pole wektorowe X, porządkując jednocześnie współczynniki przy wektorach bazowych w kierunku współrzędnych a i b:

$$X = \left[(x-y)\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + (x+y)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{\partial}{\partial a} +$$
$$\left[(x-y)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + (x+y)\frac{y^2+x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{\partial}{\partial b} =$$
$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{[-(x-y)^2(x+y) - 2xy(x+y)]\frac{\partial}{\partial a} + [-2xy(x-y) + (x+y)^2(x-y)]\frac{\partial}{\partial b}\right\} =$$
$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{(x+y)(-x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial a} + (x-y)(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial b}\right\} = -(a+b)\frac{\partial}{\partial a} + (a-b)\frac{\partial}{\partial b}.$$

Formalnie, opis pola X we współrzędnych (a,b) obowiązuje na sferze z wyłączeniem obu biegunów. Biegun północny nie należy do dziedziny współrzędnych (x,y), zatem X w ogóle nie jest tam określone, zaś biegun południowy nie należy do dziedziny (a,b), więc otrzymane z zamiany zmiennych wyrażenie w nim nie obowiązuje. Patrząc jednak na postać X we współrzędnych (a,b) widzimy, że można to pole w sposób gładki dookreślić w biegunie północnym $(a,b)=(0,0)$ kładąc tam wartośc pola równą 0. Ostatecznie więc X jest gładkim polem wektorowym zdefiniowanym na całej sferze. Na biegunach pole ma wartość 0, zaś w pozostałych punktach wyraża się jednym lub drugim wzorem w zależności od tego, jakich współrzędnych chcemy używać. To samo pole wektorowe możemy jeszcze zapisać we współrzędnych sferycznych (φ,ϑ). Przyjmuje ono postać

$$X = \frac{\partial}{\partial\varphi} - \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}.$$

Sferyczny układ współrzędnych nie obowiązuje na obu biegunach, zatem fakt, że te wpółrzędne nie pozwalają przedłużyć pola na bieguny, specjalnie nie dziwi. ♣

Sprawdźmy teraz jak pola i formy zachowują się względem odwzorowań rozmaitości. Oznaczmy przez F gładkie odwzorowanie

$$F : M \longrightarrow N.$$

Wiemy już, że korzystając z odwzorowania stycznego możemy przenieść każdy wektor styczny z $\mathsf{T}M$ do $\mathsf{T}N$. Jednak jeśli odwzorowanie nie jest injektywne, może się zdarzyć, że obrazy dwóch różnych wektorów będących wartościami pola na M w różnych punktach mających wspólny obraz w N będą różne. Zazwyczaj nie można przenieść pola wektorowego X z rozmaitości M na rozmaitość N. Da się to jednak zrobić zawsze, gdy F jest dyfeomorfizmem. W takiej sytuacji definiujemy *transport pola wektorowego*:

$$(F_*X)(F(q)) = \mathsf{T}F(X(q)).$$

Inaczej jest z formami: formę z N zawsze można cofnąć na M korzystając z relacji T^*F. Definiujemy zatem *cofnięcie* albo *pull-back* formy α na N pokazując jak cofnięta forma działa na wektory styczne do M:

$$\langle (F^*\alpha)(q), v\rangle = \langle \alpha, \mathsf{T}F(v)\rangle.$$

Oznaczenia F_* i F^* wskazują na zastosowanie odwzorowania stycznego i relacji kostycznej do pól wektorowych i form a nie do pojedynczych wektorów i kowektorów.

3.3 Krzywe całkowe pola wektorowego

Krzywą całkową pola wektorowego $X \in \mathcal{X}(M)$ nazywamy gładką krzywą $\gamma : I \to M$, $t \mapsto \gamma(t)$ taką, że

$$\forall t \in I \quad \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)),$$

czyli pole X jest styczne do krzywej i prędkość krzywej jest równa wartości pola. Zanim zagłębimy się w kwestie teoretyczne, obejrzyjmy przykład:

Przykład 14 Rozważmy pole wektorowe X z przykładu 13 dane we współrzędnych stereograficznych (względem bieguna północnego) na sferze dwuwymiarowej wzorem

$$X = (x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Jeśli krzywa $t \mapsto (x(t), y(t))$ jest krzywą całkową pola to

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (x(t) - y(t), x(t) + y(t)).$$

Otrzymaliśmy więc układ równań różniczkowych, który do tej pory (na analizie II) zapisywany był jako

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Zapisa macierzowy sugeruje istnienie struktury liniowej na przestrzeni na której pole X jest określone. Pamiętamy jednak, że X jest polem na sferze i fakt że można je zapisać jako układ równań liniowych o stałych współczynnikach związany jest ze szczególnym wyborem układu współrzędnych. Wytężywszy pamięć i sięgnąwszy do zasobów wiedzy algebraicznej, bylibyśmy pewnie w stanie rozwiązać ten układ równań... Otrzymalibyśmy wówczas następującą postać rozwiązania (dalej stosujemy wektorową notację algebraiczną).

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Powyższa krzywa przechodzi przez punkt (x_0, y_0) dla $t = 0$. Jest też oczywiście stała krzywa $(x(t) = 0, y(t) = 0)$ odpowiadająca warunkom początkowym w biegunie południowym.

Widzimy zatem, że pole wektorowe na rozmaitości zapisane w układzie współrzędnych to nic innego jak układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania takiego układu dla zadanych warunków początkowych gwarantowana jest przez twierdzenie Cauchy'ego. Zadanie warunków początkowych oznacza wybranie punktu na rozmaitości, przez który krzywa całkowa przechodzi dla parametru $t = 0$. Wiemy już więc, że krzywe całkowe istnieją, przynajmniej lokalnie. Krzywe całkowe naszego pola można też znaleźć korzystając ze współrzędnych sferycznych:

$$X = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

i rozwiazując układ równań

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{\vartheta} = -\sin\vartheta.$$

Krzywa całkowa przechodząca dla $t = 0$ przez punkt (φ_0, ϑ_0) to

$$t \longmapsto \gamma(t) = \left(\varphi_0 + t,\, 2\arctan[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)e^t]\right).$$

Zauważmy jaką ciekawą własność ma powyższe rozwiązanie: Zapiszmy krzywą całkową w parametrze s z warunkiem początkowym dla $s = 0$ równym $\gamma(t)$:

$$s \longmapsto \left(\varphi(t) + s, 2\arctan[\tan\left(\frac{\vartheta(t)}{2}\right)e^s]\right).$$

Ale $\varphi(t) = \varphi_0 + t$ oraz $\vartheta(t) = 2\arctan[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)e^t]$. W szczególności druga współrzędna to:

$$2\arctan[\tan\left(2\arctan[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)e^t]/2\right)e^s] = 2\arctan[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)e^te^s] = 2\arctan[\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)e^{t+s}]$$

Okazuje się więc, że $s \longmapsto \gamma(s+t)$. Podobny wynik otrzymamy prowadząc rachunki we współrzędnych stereograficznych:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} &= e^s \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \\ &= e^{t+s} \begin{bmatrix} \cos(t+s) & -\sin(t+s) \\ \sin(t+s) & \cos(t+s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Powyższa własność jest ogólną własnością krzywych całkowych. Przesunięcie wzdłuż krzywych całkowych o t jest dyfeomorfizmem rozmaitości M:

$$\Phi_t : M \longrightarrow M$$

o własnościach

$$(1)\ \ \Phi_0(q) = q, \qquad (2)\ \ \Phi_s(\Phi_t(q)) = \Phi_{t+s}(q).$$

Ponadto dla każdego q

$$t \longmapsto \Phi_t(q)$$

jest (z definicji Φ_t) krzywą całkową pola X. Odwzorowanie

$$\Phi : I \times M \longrightarrow M, \qquad \Phi(t,q) = \Phi_t(q).$$

Nazywane jest *lokalną grupą dyfeomorfizmów* związaną z X. Określenie „grupa" odnosi się tu do własności (1) i (2). Okazuje się, że każde pole wektorowe definiuje lokalną grupę dyfeomorfizmów i odwrotnie, każda lokalna grupa dyfeomorfizmów odpowiada pewnemu polu wektorowemu. Dowód tego faktu odkładamy do rozdziału dotyczącego pochodnych Liego.♣